6134

72

Allgemeine Anleitung

zur Berechnung

der

Leibrenten und Anwartschaften.

Von

Dr. *Joh. Heinr. Meyer,*

Königl. Dänischem Etatsrath, Committirten in der Rentekammer und Mitdirector der allgemeinen Wittwenkasse und Versorgungsanstalt zu Kopenhagen.

Zweiter Theil.

K o p e n h a g e n,

bey Friedrich Brummer.

1 8 2 3.

HG
8781
M4
T2

Vorrede.

Indem ich hier, meinem Versprechen gemäfs, den zweiten Theil der Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften liefere, beziehe ich mich in Ansehung des Zwecks dieses Werks auf die Vorrede zu dem ersten Bande. Was die Ausführung betrifft, so glaube ich diesen Theil der Mathematik, innerhalb der Gränzen der möglichen Anwendung, vollständig abgehandelt zu haben, wiewohl vielleicht einzelne Materien noch faslicher dargestellt werden können. Ein sehr geschätzter Ma-

thematiker hat die Güte gehabt, nach Lesung des ersten Theils, mir die Bemerkung mitzutheilen, dafs die Süfsmilchsche Sterbensordnung vom 10ten Jahre an sich ziemlich genau durch die Gleichung: $y = 598{,}1673049 - 8{,}4174552\ x + 0{,}2308954\ x^2 - 0{,}0052473\ x^3 + 0{,}00003213682\ x^4$ darstellen lafse, wo y die Zahl der Lebenden und x das Alter bedeutet. Vielleicht wären auch für andre Sterbensordnungen ähnliche Gleichungen aufzufinden, indefsen möchten doch die, Seite 212 des gegenwärtigen Bandes angegebenen, in der Berechnung liegenden Schwierigkeiten der Anwendung solcher Formeln unübersteigliche Hinderniſse entgegensetzen. Wenn übrigens noch jetzt

die Anordnung des Ganzen abzuändern wäre, so würde ich das dritte Kapitel *von der Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens*, mit der Ueberschrift: *von der Wahrscheinlichkeit des Absterbens in einer bestimmten Ordnung*, den Kapiteln von der Dauer des Ueberlebens und des längsten Lebens nachsetzen. Es entspricht dies dritte Kapitel hauptsächlich dem neunten von den Anwartschaften, so wie die Kapitel vom Ueberleben und längsten Leben die Vorbereitungssätze zu den Kapiteln von den Renten auf das Ueberleben und längste Leben enthalten. Auch hätte die Materie vom Absterben in einer bestimmten Ordnung, welche überhaupt die meisten Schwierigkeiten hat, kürzer vorgetragen werden kön-

nen, wenn die allgemeinen Formeln für die Dauer des Ueberlebens vorausgeschickt wären. Ich bemerke dies für den künftigen Bearbeiter dieses Gegenstandes, da ich wohl nicht hoffen darf, bey einer etwanigen zweiten Auflage des gegenwärtigen Werks selbst zu deſsen Verbeſserung mitwirken zu können.

Kopenhagen, den 20sten März, 1823.

Meyer.

Uebersicht des Inhalts.

Vierter Abschnitt.

Von Renten und Anwartschaften, die von mehrerer Personen Leben abhangen.

Erstes Kapitel.

Von den allgemeinen Veränderuugen der Verbindungen.

Anzahl aller möglichen Verbindungen in einem gegebenen Vereine, §. 197.

Veränderter Zustand der Verbindungen *nach einer gewissen Zeit*, §. 198 und 199.

Veränderungen, die *in einem bestimmten Jahre* vorfallen, §. 200.

Wahrscheinlichkeit, dafs eine bestimmte Veränderung *zu einer gegebenen Zeit* geschehen sey, §. 201.

Wahrscheinlichkeit, dafs eine bestimmte Veränderung *in einem gegebenen Jahre* geschehe, §. 202.

Zweites Kapitel.

Vom Zusammenleben unter mehreren Personen.

Erklärung, §. 203.

Berechnung der *Verbindungsdauer* nach der *Hypothese* des gleichmäfsigen Absterbens *für Personen von gleichem Alter*, §. 203, b. und 204.

Desgleichen für *Personen von verschiedenem Alter*, §. 205 u. 206.

Berechnung der Verbindungsdauer *nach jeder Sterbensordnung*, auf ganze Jahre, §. 207 und 208.

Correction derselben, §. 209.

Allgemeiner Ausdruck für den *vollständigen Werth*, §. 209, b.

Näherungsberechnung, §. 210.

Bemerkungen darüber, Anm.

Drittes Kapitel.

Von der Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens.

Erklärungen, §. 211 und 212.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit *auf ganze Jahre*, §. 213.

Imgleichen *auf augenblickliche Zeittheile*, §. 214 bis 216.

Wahrscheinlichkeit des *zwiefachen Ueberlebens*, §. 217 u. 218.

Viertes Kapitel.

Von der Dauer des Ueberlebens unter mehreren Personen.

Erklärung, §. 219.

Berechnung der Dauer des Ueberlebens nach der *Hypothese*, für *Personen von gleichem Alter*, §. 220.

Imgleichen für *Personen von verschiedenem Alter*, §. 221.

Berechnung des Ueberlebens *nach jeder Sterbensordnung*, §. 222 und 223.

Berechnung des *disjunctiven Ueberlebens*, §. 224.

Berechnung des *zwiefachen Ueberlebens*, §. 225 bis 229.

Fünftes Kapitel.

Vom längsten Leben und längsten Ueberleben unter mehreren Personen.

Erklärung, §. 230.

Längstes Leben und Ueberleben nach der *Hypothese*, §. 231.

Längstes Leben und Ueberleben für *die ersten Verbindungsgrade*, §. 232 und 233.

Allgemeine Formel für das längste Leben und Ueberleben, §. 234 und 235.

Längste Verbindung, worin *eine bestimmte Person begriffen*, §. 236.

Sechstes Kapitel.

Von Verbindungsrenten unter mehreren Personen.

Berechnung nach der *Hypothese* für *Personen von gleichem Alter*, §. 237 bis 239.

Imgleichen für *Personen von verschiedenem Alter*, §. 240 – 242.

Berechnung der Verbindungsrenten *für jede Sterbensordnung* auf ganze Jahre, §. 243 und 244.

Correction derselben, §. 245.

Allgemeine Formel *für die vollständige Verbindungsrente*, §. 245. b.

Verbindungsrente, in *augenblicklichen Terminen* zahlbar, §. 246.

Aus einer gegebenen Verbindungsrente die Rente *für ältere oder jüngere Personen* zu berechnen, §. 247.

Näherungsberechnung, §. 248 a und b.

Bemerkungen darüber, Anm.

Steigende Verbindungsrente nach derHypothese, §.249 u.250.

Dieselbe nach jeder Sterbensordnung, §. 251 und 252.

Aufgeschobene und aufhörende einfache Verbindungsrente, §. 253 bis 255.

Aufgeschobene und aufhörende steigende Verbindungsrente, §. 256 bis 258.

Siebentes Kapitel.

Von Ueberlebensrenten unter mehreren Personen.

Erklärung, §. 259.

Berechnung der Ueberlebensrenten nach der *Hypothese*, §. 260 und 261.

Berechnung nach *jeder Sterbensordnung*, §. 262 bis 264.

Renten auf das *disjunctive Ueberleben*, §. 265 und 266.

*Aufgeschobene und aufhörende*Ueberlebensrente,§. 267 - 270.

Bedingte Ueberlebensrente, §. 271.

Ankauf der Ueberlebensrente auf den *Contributionsfuss*, §. 272.

Renten auf das *zwiefache Ueberleben*, §. 273 bis 276.

Bemerkungen darüber, Anm.

Achtes Kapitel.

Von der Rente des Längstlebenden unter mehreren Personen.

Erklärung, §. 277.

Rente auf das *längste Leben* und die längste Verbindung nach der *Hypothese*, §. 278.

Dieselbe nach *jeder Sterbensordnung*, §. 279 und 280.

Rente auf das *längste Ueberleben*, §. 281 und 282.

Rente auf die Dauer und das Ueberleben der längsten *Verbindung, worin eine bestimmte Person begriffen*, §. 283 u. 284.

Antheil einer bestimmten Person an der Rente des Längstlebenden, §. 285.

Rente auf die Dauer und das Ueberleben der längsten *Verbindung, worin ein bestimmter Verein begriffen*, §. 286 u. 287.

Antheil eines bestimmten Vereins an der Rente des Längstlebenden, §. 288.

Rente auf das *längste Ueberleben nach dem Tode bestimmter Personen*, §. 289.

Näherungsmethode zur Berechnung der *Tontinen*, §. 290.

Erläuterungen darüber, Anm.

Neuntes Kapitel.

Von Anwartschaften, die von mehreren Leben abhangen.

Anwartschaften, die *zu einer bestimmten Zeit* unter gegebenen Bedingungen fällig sind, §. 291 und 292.

Anwartschaften, die *bey Auflösung der Verbindung* verfallen, §. 293 und 294.

Anwartschaft, fällig bey dem Tode *einer bestimmten Person*, wenn sie *zuerst stirbt*, §. 295.

Imgleichen, wenn die bestimmte Person *zuletzt stirbt*, §. 296.

Desgleichen, wenn die bestimmte Person die *mittlere im Sterben* ist, §. 297.

Aus den vorhergehenden Fällen zusammengesetzte Anwartschaften, §. 298.

Anwartschaft, fällig bey dem Tode einer *bestimmten Person, wenn von mehreren andern noch irgend eine lebt*, §. 299.

Desgleichen, zahlbar bey *dem Abgange des Längstlebenden* unter zweien, *wenn von den übrigen noch einer lebt*, §. 300.

Anwartschaften, zahlbar bey gewifsen *der Zeitordnung nach bestimmten Todesfällen*, §. 301 a und b.

Aufgeschobene Anwartschaften, §. 302.

Aufhörende Anwartschaften, §. 303.

Bedingte Anwartschaften, §. 304.

Antheil jedes von mehreren Erben an einer Anwartschaft, §. 305.

Geschlofsene Todtenkafsen für Ehepaare, bey jedesmaligen Beiträgen, §. 306.

Anwartschaften, die vom *zwiefachen Ueberleben* unter drey Personen abhangen, §. 307 und 308.

Bemerkungen darüber, Anm.

Vierter Abschnitt.

Von
Renten und Anwartschaften,
die von mehrerer Personen Leben
abhangen.

Vorerinnerung.

Dieser vierte Abschnitt enthält die Theorie der Leibrenten und Anwartschaften nicht nur der höheren, sondern aller, Grade. Da hiebey die Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens, der sich vielleicht nach vollständigern Erfahrungen alle Sterbensordnungen mehr oder weniger nähern möchten, nicht übergangen werden konnte, so wird hier durchgehends, um von den einfachern Aufgaben zu den zusammengesetzten überzugehen, zunächst von den Berechnungen nach der Hypothese, sodann aber von den Berechnungen nach andern Sterbensordnungen gehandelt werden.

Uebrigens soll in dem Folgenden ein Inbegriff von einzelnen Personen, welche in Ansehung der Renten und Anwartschaften verbunden sind, ein *Verein*, ein Inbegriff von Vereinen aber zu dem nämlichen Zwecke eine *Gesellschaft* genannt werden. Unter *Verbindung*, welches Wort auch wohl für einen Verein oder für eine Gesellschaft gebraucht werden kann, wird insbesondre die Form des Zusammenseyns der einzelnen Personen verstanden werden. Sind also z. B. vier Personen in Beziehung auf Renten und Anwartschaften mit einander verbunden, so machen diese vier einzelne Personen, oder so viel jedesmal von ihnen noch übrig sind, einen Verein aus, welches Wort also hier für mehrere ausdruckt, was *Paar* für zwey bezeichnet. Treten hundert dieser Vereine zusammen, so bilden sie eine Gesellschaft. Die Verbindung jedes Vereins ist anfänglich die nach vier.

Erstes Kapitel.

Von
den allgemeinen Veränderungen
der Verbindungen.

§. 197.

Wenn ein Verein von *m* Personen existirt, so

können, aufser der Verbindung nach m, welche unter sämtlichen Personen eine Zeitlang besteht, auch die Verbindungen nach m — 1, m — 2 etc. in Betracht kommen, welche unter den gegebenen Personen Statt haben können.

Sollen nun alle Verbindungen, welche anfänglich die einzelnen Personen unter einander, neben der genannten allgemeinen Verbindung nach *m*, ausmachen können, gezählt werden, so existiren unter der gegebenen Zahl von Personen, aufser der Verbindung nach m, noch $\frac{m.m-1..2}{1.2..(m-1)}$ Verbindungen nach m — 1, $\frac{m.m-1..3}{1.2..(m-2)}$ Verbindungen nach m — 2 etc., imgleichen m einzelne Personen, die als Verbindungen nach dem Exponenten 1 angesehen werden können.

Will man alle Verbindungen, die überhaupt unter den m Personen Statt finden können, auch die einzelnen Existenzen mitgerechnet, zusammennehmen, so ist also die Summe derselben $= m + \frac{m.m-1}{1.2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} + \ldots + \frac{m.m-1..2}{1.2..(m-1)} + \frac{m.m-1..1}{1.2..m} = (1+1)^m - 1 = 2^m - 1.$

§. 198.

Wenn eine etwas beträchtliche Anzahl von

Vereinen aus m Personen, jeder von gegebenem Alter, in eine Gesellschaft zusammentritt, so werden, da der Erfahrung zufolge nicht alle Personen von demselben Alter zu gleicher Zeit abgehen, nach einiger Zeit einige Vereine ungetrennt bestehen, von andern Vereinen wird eine Person, von noch andern zwey etc. abgegangen seyn; einige Vereine werden aber ganz ausgestorben seyn.

Wenn z. B. eine Gesellschaft existirt, worin die Personen je drey und drey verbunden sind, nämlich eine vom Alter a, die zweite vom Alter b, die dritte vom Alter c, wenn ferner A, B und C die nach der Sterbensordnung zu diesen Altern gehörigen Zahlen der Lebenden sind, und die Anzahl der Vereine, hier Conternationen, $= A\ B\ C$ gesetzt wird, so existiren am Erde des $x$ten Jahr $A^{\overline{x}}B^{\overline{x}}C^{\overline{x}}$ ungetrennte Vereine. Von andern Vereinen sind am Ende des xten Jahrs entweder die A oder die B oder die C allein gestorben, und die Anzahl dieser Vereine zusammengenommen ist $=$ $(A - A^{\overline{x}})\ B^{\overline{x}}\ C^{\overline{x}} + (B - B^{\overline{x}})\ A^{\overline{x}}\ C^{\overline{x}} + (C - C^{\overline{x}})\ A^{\overline{x}}\ B^{\overline{x}}$. Von noch andern Vereinen sind zwey Personen abgegangen, nämlich entweder die A und B, oder die A und C, oder die B und C, und die Zahl solcher Conternationen ist $=$ $(A - A^{\overline{x}})\ (B - B^{\overline{x}})\ C^{\overline{x}} + (A - A^{\overline{x}})\ (C - C^{\overline{x}})\ B^{\overline{x}} + (B - B^{\overline{x}})\ (C - C^{\overline{x}})\ A^{\overline{x}}$. Endlich sind

von einigen Vereinen alle drey Personen verstorben, und deren Anzahl ist am Ende des xten Jahrs

$= (A - A^{\overline{x}})\ (B - B^{\overline{x}})\ (C - C^{\overline{x}})$.

Alle diese Vereine für jedes xte Jahr zusammengenommen machen wieder die ursprüngliche Zahl derselben, nämlich A B C, aus.

Die Verbindungen, welche übrigens hiebey vorkommen, sind 1) die Verbindungen nach drey, wovon nur eine für jeden Verein existirt, 2) die bestehenden Verbindungen nach 2 unter drey Personen, deren drey sind, 2) die Verbindungen nach 1 unter drey Personen, oder einzelne Existenzen, deren wieder drey sind. Die Anzahl aller dieser Verbindungen ist, wie im vorigen §. angegeben worden, $= 2^3 - 1 = 7$. Nimmt man hiezu noch den Fall, dafs alle drey Personen ausgestorben sind, so erhält man überhaupt $2^3 = 8$ verschiedene Fälle.

Wenn in der Gesellschaft je vier und vier Personen einen Verein ausmachen, wenn ferner das anfängliche Alter dieser verschiedenen Personsn mit a, b, c und d, die dazu gehörige Zahlen der Lebenden mit A, B, C und D bezeichnet werden, und die anfängliche Zahl der Vereine $= A\,B\,C\,D$ ist, so hat man die Zahl der am Ende des xten Jahrs noch bestehenden ungetrennten Vereine oder Conquaternationen $= A^{\overline{x}}B^{\overline{x}}C^{\overline{x}}D^{\overline{x}}$, die Anzahl derer Vereine, von denen eine Person gestorben,

$= (A - A^{\overline{x}})\ B^{\overline{x}}C^{\overline{x}}D^{\overline{x}} + (B - B^{\overline{x}})\ A^{\overline{x}}C^{\overline{x}}D^{\overline{x}}$

$+ (C - C^{\overline{x}})\, A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} D^{\overline{x}} + (D - D^{\overline{x}}) A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} C^{\overline{x}}$, die Anzahl solcher Vereine, wovon zwey Personen gestorben sind, $(A - A^{\overline{x}})\, (B - B^{\overline{x}})\, C^{\overline{x}} D^{\overline{x}} + (A - A^{\overline{x}})\, (C - C^{\overline{x}})\, B^{\overline{x}} D^{\overline{x}} + (A - A^{\overline{x}})\, (D - D^{\overline{x}})\, B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} + (B - B^{\overline{x}})\, (C - C^{\overline{x}})\, A^{\overline{x}} D^{\overline{x}} + (B - B^{\overline{x}})\, (D - D^{\overline{x}})\, A^{\overline{x}} C^{\overline{x}} + (C - C^{\overline{x}})\, (D - D^{\overline{x}})\, A^{\overline{x}} B^{\overline{x}}$, die Anzahl derer Vereine, aus denen drey Personen gestorben sind, $=$ $(A - A^{\overline{x}})\, (B - B^{\overline{x}})\, (C - C^{\overline{x}})\, D^{\overline{x}} + (A - A^{\overline{x}})\, (B - B^{\overline{x}})\, (D - D^{\overline{x}})\, C^{\overline{x}} + (A - A^{\overline{x}})\, (C - C^{\overline{x}})\, (D - D^{\overline{x}})\, B^{\overline{x}} + (B - B^{\overline{x}})\, (C - C^{\overline{x}})\, (D - D^{\overline{x}})\, A^{\overline{x}}$, und endlich die Anzahl solcher Vereine, von denen alle vier Personen verstorben sind, $=$ $(A - A^{\overline{x}})\, (B - B^{\overline{x}})\, (C - C^{\overline{x}})\, (D - D^{\overline{x}})$.

Die Anzahl der Verbindungsfälle, welche in jedem Jahre Statt finden können, den Fall des gänzlichen Aussterbens miteingerechnet, ist daher wieder $= 15 + 1 = 2^4$.

Wenn übrigens x der Altersergänzung irgend einer Person, z. B. A, gleich wird, so wird $A^{\overline{x}} = 0$, folglich der oder die Theile, worin $A^{\overline{x}}$ als Factor vorkömmt, $= 0$. Dagegen wird in diesem Fal-

le $A - A^{\overline{x}} = A$; wenn also x der gröfsten Altersergänzung gleich ist, so wird

$(A - A^{\overline{x}})\ (B - B^{\overline{x}})\ (C - C^{\overline{x}})\ (D - D^{\overline{x}}) = ABCD$, d. h. es sind dann alle Vereine ausgestorben, und jeder der übrigen Ausdrücke, welche die Verbindungen nach irgend einem andern Exponenten gröfser als 0 angeben, ist für sich $= 0$.

Es ergiebt sich leicht, dafs das nämliche Gesetz für alle höhern Verbindungen gelte.

§. 199.

Die Anzahl der zu Ende des xten Jahrs vorhandenen ungetrennten Vereine bey einer anfänglichen Verbindung unter den Personen A B C D ist nach dem vorhergehenden §. $= A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}$. Folglich ist die *am Ende des xten vorhandene Anzahl getrennter Vereine*, d. h. derer, wovon irgend eine Person gestorben ist, $= ABCD - A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}$. Diese Zahl der getrennten Vereine begreift auch die Zahl der ganz ausgestorbenen in sich.

Ferner ist nach dem vorhergehenden §. die Zahl der am Ende des xten Jahrs ganz ausgestorbenen Vereine, $= (A - A^{\overline{x}})(B - B^{\overline{x}})(C - C^{\overline{x}})(D - D^{\overline{x}})$

$= A\,B\,C\,D - (A^{\overline{x}}\,B\,C\,D + B^{\overline{x}}\,A\,C\,D + C^{\overline{x}}\,A\,B\,D + D^{\overline{x}}\,A\,B\,C) + (A^{\overline{x}} B^{\overline{x}}\,C\,D +$

$A^{x}C^{x}BD + A^{x}D^{x}BC + B^{x}C^{x}AD +$
$B^{x}D^{x}AC + C^{x}D^{x}AB) - (A^{x}B^{x}C^{x}D +$
$A^{x}B^{x}D^{x}C + A^{x}C^{x}D^{x}B + B^{x}C^{x}D^{x}A) +$
$A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}$. Folglich ist die *Zahl derer Vereine*, die *am Ende des xten Jahrs* nicht ganz ausgestorben sind, d. h. derer, *wovon noch irgend eine Person lebt*, $=$ $ABCD -$
$(A - A^{x})(B - B^{x})(C - C^{x})(D - D^{x})$
$= A^{x}BCD + B^{x}ACD + C^{x}ABD$
$+ D^{x}ABC - (A^{x}B^{x}CD + A^{x}C^{x}BD$
$+ A^{x}D^{x}BC + B^{x}C^{x}AD + B^{x}D^{x}AC$
$+ C^{x}D^{x}AB) + (A^{x}B^{x}C^{x}D + A^{x}B^{x}D^{x}C$
$+ A^{x}C^{x}D^{x}B + B^{x}C^{x}D^{x}A) - A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}$.
Die Zahl dieser Vereine begreift auch die der bestehenden ungetrennten Vereine in sich.

§. 200.

Die Zahl derer Vereine, welche *im Laufe des xten Jahrs getrennt werden*, ist $=$
$A^{x-1}B^{x-1}C^{x-1}D^{x-1} - A^{x}B^{x}C^{x}D^{x} =$
$\Delta(A^{x-1}B^{x-1}C^{x-1}D^{x-1})$. Auch hier befafst wie-

der die Zahl derer Vereine, welche in irgend einem Jahre getrennt werden, diejenigen Vereine, welche in dem nämlichen Jahre ganz aussterben, in sich.

Die Anzahl der *im xten Jahre aussterbenden Vereine* ist $= (A-A^{\overline{x}})\,(B-B^{\overline{x}})\,(C-C^{\overline{x}})\,(D-D^{\overline{x}}) - (A-A^{\overline{x-1}})\,(B-B^{\overline{x-1}})\,(C-C^{\overline{x-1}})\,(D-D^{\overline{x-1}}) = A^{\overline{x-1}}BCD + B^{\overline{x-1}}ACD + C^{\overline{x-1}}ABD + D^{\overline{x-1}}ABC - (A^{\overline{x-1}}B^{\overline{x-1}}CD + A^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}BD + A^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}BC + B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}AD + B^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}AC + C^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}AB) + (A^{\overline{x-1}}B^{\overline{x-1}}C^{\overline{y-1}}D + A^{\overline{x-1}}B^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}C + A^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-r}}D^{\overline{x-1}}B + B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}A) - A^{\overline{x-1}}B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}} - (A^{\overline{x}}BCD + B^{\overline{x}}ACD + C^{\overline{x}}ABD + D^{\overline{x}}ABC) + (A^{\overline{x}}B^{\overline{x}}CD + A^{\overline{x}}C^{\overline{x}}BD + A^{\overline{x}}D^{\overline{x}}BC + B^{\overline{x}}C^{\overline{x}}AD + B^{\overline{x}}D^{\overline{x}}AC + C^{\overline{x}}D^{\overline{x}}AB) - (A^{\overline{x}}B^{\overline{x}}C^{\overline{x}}D + A^{\overline{x}}B^{\overline{x}}D^{\overline{x}}C + A^{\overline{x}}C^{\overline{x}}D^{\overline{x}}B + B^{\overline{x}}C^{\overline{x}}D^{\overline{x}}A) + A^{\overline{x}}B^{\overline{x}}C^{\overline{x}}D^{\overline{x}}$, oder auch $= BCD.\Delta A^{\overline{x-1}} + ACD.\Delta B^{\overline{x-1}} + ABD.\Delta C^{\overline{x-1}} + ABC.\Delta D^{\overline{x-1}} - [CD\Delta(A^{\overline{x-1}}B^{\overline{x-1}}) + BD\Delta(A^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}})$

$$+ BC\Delta(A^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}) + AD\Delta(B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}})$$
$$+ AC\Delta(B^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}) + AB\Delta(C^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}})]$$
$$+ [D\Delta(A^{\overline{x-1}}B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}) + C\Delta(A^{\overline{x-1}}B^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}})$$
$$+ B\Delta(A^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}) + A\Delta(B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}})$$
$$- \Delta(A^{\overline{x-1}}B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}D^{\overline{x-1}}).$$

Im Laufe jedes Jahrs wird die *Zahl der Vereine, wovon irgend Jemand lebt,* um so viel kleiner als Vereine ganz aussterben, d. h. die Abnahme der Vereine, wovon noch irgend Jemand lebt, ist gleich der Zunahme der ganz ausgestorbenen Vereine, also $= (A - A^{\overline{x}})(B - B^{\overline{x}})(C - C^{\overline{x}})(D - D^{\overline{x}}) -$
$(A - A^{\overline{x-1}})(B - B^{\overline{x-1}})(C - C^{\overline{x-1}})(D - D^{\overline{x-1}})$.

§. 201.

Wenn die *Wahrscheinlichkeit* gesucht wird, daſs irgend ein bestimmter Verein in einer gegebenen Zeit zu einer gewiſsen Verbindungsart gehöre, so muſs die Zahl derer Vereine, die zu der gegebenen Zeit in einer solchen Verbindung stehen, durch die anfängliche Anzahl aller Vereine dividirt werden.

Sind also anfänglich vier Personen vom Alter a, b, c, d verbunden und ist ihre anfängliche Zahl $=$ A B C D, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs am Ende des xten Jahrs *ein bestimmter Verein noch un-*

getrennt bestehe, $= \frac{A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{ABCD}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des xten Jahrs A todt sey, die andern drey Personen aber noch leben, ist $= \frac{(A - A^{\overline{x}}) B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{ABCD}$

$= \frac{B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{BCD} - \frac{A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{ABCD}$,

die Wahrscheinlichkeit, dafs zu derselben Zeit A und B todt sind, B und C aber leben, $=$

$\frac{(A - A^{\overline{x}})(B - B^{\overline{x}}) C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{ABCD} =$

$\frac{C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{CD} - (\frac{A^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{ACD} + \frac{B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{BCD})$

$+ \frac{A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{ABCD}$, so wie die Wahrscheinlichkeit, dafs A, B und C todt sind, D aber noch lebe, $= \frac{(A - A^{\overline{x}})(B - B^{\overline{x}})(C - C^{\overline{x}}) D^{\overline{x}}}{ABCD}$

$= \frac{D^{\overline{x}}}{D} - (\frac{A^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{AD} + \frac{B^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{BD}$

$+ \frac{C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{CD}) + (\frac{A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{ABD} +$

$$\frac{A^{x}C^{x}D^{x}}{A\,C\,D} + \frac{B^{x}C^{x}D^{x}}{B\,C\,D}) - \frac{A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}}{A\,B\,C\,D}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs zu der gegebenen Zeit alle vier Personer ausgestorben sind, ist $=$

$$\frac{(A - A^{x})\,(B - B^{x})\,(C - C^{x})\,(D - D^{x})}{A\;B\;C\;D}$$

$$= 1 - (\frac{A^{x}}{A} + \frac{B^{x}}{B} + \frac{C^{x}}{C} + \frac{D^{x}}{D}) + (\frac{A^{x}B^{x}}{A\,B} + \frac{A^{x}C^{x}}{A\,C} + \frac{A^{x}D^{x}}{A\,D} + \frac{B^{x}C^{x}}{B\,C} + \frac{B^{x}D^{x}}{B\,D} + \frac{C^{x}D^{x}}{C\,D}) - (\frac{A^{x}B^{x}C^{x}}{A\,B\,C} + \frac{A^{x}B^{x}D^{x}}{A\,B\,D} + \frac{A^{x}C^{x}D^{x}}{A\,C\,D} + \frac{B^{x}C^{x}D^{x}}{B\,C\,D}) + \frac{A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}}{A\,B\,C\,D}.$$

Die *Wahrscheinlichkeit*, dafs am Ende des xten Jahrs ein *bestimmter Verein* überhaupt *getrennt sey* $= \frac{A\,B\,C\,D - A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}}{A\,B\,C\,D}$

$$= 1 - \frac{A^{x} B^{x} C^{x} D^{x}}{A B C D}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des xten Jahrs von einem bestimmten Verein *noch irgend eine Person lebe*, ist

$$\frac{ABCD-(A-A^{x})\,(B-B^{x})\,(C-C^{x})\,(D-D^{x})}{A B C D}$$

$$= \frac{A^{x}}{A} + \frac{B^{x}}{B} + \frac{C^{x}}{C} + \frac{D^{x}}{D}$$

$$- \left(\frac{A^{x} B^{x}}{A B} + \frac{A^{x} C^{x}}{A C} + \frac{A^{x} D^{x}}{A D}\right.$$

$$\left. + \frac{B^{x} C^{x}}{B C} + \frac{B^{x} D^{x}}{B D} + \frac{C^{x} D^{x}}{C D}\right)$$

$$+ \left(\frac{A^{x} B^{x} C^{x}}{A B C} + \frac{A^{x} B^{x} D^{x}}{A B D}\right.$$

$$\left. + \frac{A^{x} C^{x} D^{x}}{A C D} + \frac{B^{x} C^{x} D^{x}}{B C D}\right)$$

$$- \frac{A^{x} B^{x} C^{x} D^{x}}{A B C D}.$$

§. 202.

Auf dieselbe Weise findet man die *Wahrscheinlichkeit*, dafs eine oder einige Personen *im Laufe des xten Jahrs* versterben, dafs ein gewifser Verein im Laufe dieses Jahrs aussterbe oder überhaupt ge-

trennt werde, wenn man wieder die Anzahl derer Vereine, bey welchen dieser Fall Statt findet, mit der anfänglichen Zahl aller Vereine dividirt. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, dafs ein bestimmter Verein von vier Personen A, B, C und D während des xten Jahrs *getrennt werde*, =

$$\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\,D} - \frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{A\,B\,C\,D}$$

$$= \frac{\Delta(A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}})}{A\,B\,C\,D}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs ein bestimmter Verein während des xten Jahrs *aussterbe*, ist =

$$\frac{(A-A^{\overline{x}})(B-B^{\overline{x}})\,(C-C^{\overline{x}})\,(D-D^{\overline{x}})}{A\,B\,C\,D} -$$

$$\frac{(A-A^{\overline{x-1}})(B-B^{\overline{x-1}})(C-C^{\overline{x-1}})(D-D^{\overline{x-1}})}{A\,B\,C\,D} -$$

$$= \frac{A^{\overline{x-1}}}{A} + \frac{B^{\overline{x-1}}}{B} + \frac{C^{\overline{x-1}}}{C} +$$

$$\frac{D^{\overline{x-1}}}{D} - (\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}}{A\,B} + \frac{A^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,C} +$$

$$\frac{A^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}}}{A\,D} + \frac{B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}}{B\,C} +$$

$$\frac{B^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}}}{B\,D} + \frac{C^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}}}{C\,D}) +$$

$$\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\;B\;C}+\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}}}{A\;B\;D}$$

$$+\frac{A^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}}}{A\;C\;D}+\frac{B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}}}{B\;C\;D})$$

$$-\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}\,D^{\overline{x-1}}}{A\;B\;C\;D}-(\frac{A^{\overline{x}}}{A}$$

$$+\frac{B^{\overline{x}}}{B}+\frac{C^{\overline{x}}}{C}+\frac{D^{\overline{x}}}{D})+$$

$$(\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}}{A\;B}+\frac{A^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{A\;C}+\frac{A^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{A\;D}$$

$$+\frac{B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{B\;C}+\frac{B^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{B\;D}+$$

$$\frac{C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{C\;D})-(\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{A\;B\;C}+$$

$$\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{A\;B\;D}+\frac{A^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{A\;C\;D}+$$

$$\frac{B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{B\;C\;D})+\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{A\;B\;C\;D}$$, oder auch

$$=\frac{\Delta\,A^{\overline{x-1}}}{A}+\frac{\Delta\,B^{\overline{x-1}}}{B}+\frac{\Delta\,C^{\overline{x-1}}}{C}$$

$$+\frac{\Delta\,D^{\overline{x-1}}}{D}-[\frac{\Delta\,(A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}})}{A\;B}+$$

$$\frac{\Delta\,(A^{x-1}\,C^{x-1})}{A\;C} + \frac{\Delta\,(A^{x-1}\,D^{x-1})}{A\;D} +$$

$$\frac{\Delta\,(B^{x-1}\,C^{x-1})}{B\;C} + \frac{\Delta\,(B^{x-1}\,D^{x-1})}{B\;D} +$$

$$\frac{\Delta\,(C^{x-1}\,D^{x-1})}{C\;D}\Big] + \Big[\frac{\Delta\,(A^{x-1}\,B^{x-1}\,C^{x-1})}{A\,B\,C}$$

$$+ \frac{\Delta\,(A^{x-1}\,B^{x-1}\,D^{x-1})}{A\,B\,D} + \frac{\Delta\,(A^{x-1}\,C^{x-1}\,D^{x-1})}{A\,C\,D}$$

$$+ \frac{\Delta\,(B^{x-1}\,C^{x-1}\,D^{x-1})}{B\,C\,D}\Big] -$$

$$\frac{\Delta\,(A^{x-1}\,B^{x-1}\,C^{x-1}\,D^{x-1})}{A\;B\;C\;D}.$$

Zweites Kapitel.

Vom

Zusammenleben unter mehreren

Personen.

§. 203.

Einige Verbindungen desselben Grades und unter Personen des nämlichen Alters dauern der Erfah-

rung zufolge längere, andere kürzere Zeit. Wird die Summe der Dauer aller Verbindungen, so wie diese Dauer sich aus den Sterblichkeitstafeln ergiebt, zusammengenommen und mit der Anzahl der Vereine dividirt, so erhält man die *mittlere Verbindungsdauer*, oder auch im Allgemeinen die Verbindungsdauer.

§. 203. b.

Wenn nun zuerst *m Personen von gleichem Alter a*, wozu die Altersergänzung α gehört, verbunden sind und x die verflossene Zeit bezeichnet, so ist nach der *Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens* der Einzelnen die mittlere Verbindungsdauer $= \frac{\int (\alpha - x)^m \, dx}{\alpha^m}$. Nun ist

$$\frac{\int (\alpha - x)^m \, dx}{\alpha^m} = - \frac{(\alpha - x)^{m+1}}{(m+1)\,\alpha^m} + C,$$

und da das Integral für $x = 0$ verschwindet, so ist die Constante $= \frac{\alpha^{m+1}}{(m+1)\,\alpha^m}$. Folglich ist der vollständige Werth des Integrals $= \frac{\alpha^{m+1} - (\alpha - x)^{m+1}}{(m+1)\,\alpha^m}$, wo man x bis zur Gränze von α annehmen kann. Setzt man aber $x = \alpha$, so erhält man die ganze mittlere Verbindungsdauer $= \frac{\alpha^{m+1}}{(m+1)\,\alpha^m} = \frac{\alpha}{m+1}$.

Es wird also die mittlere Lebensdauer für eine einzelne Person vom Alter a, $= \frac{\alpha}{2}$, die mittlere Verbindungsdauer für zwey Personen dieses Alters $= \frac{\alpha}{3}$, für drey Personen $= \frac{\alpha}{4}$ etc. (Vergleiche §. §. 61 und 127).

Anm. Wollte man m $= \infty$ annehmen, so würde $\frac{\alpha}{m + 1} = 0$, d. h. die Verbindungdauer wäre kürzer als jeder angebliche Zeittheil.

§. 204.

Nach der nämlichen Hypothese, aber nur auf ganze Jahre gerechnet, wäre für m Personen vom Alter a die mittlere Verbindungsdauer $= \frac{\int(\alpha - n)^m}{\alpha^m}$, wo für n die natürlichen Zahlen von 1 bis $\alpha - 1$ gesetzt werden müfsen. Da man hier auch 1^m als das erste und $(\alpha - 1)^m$ als das letzte Glied ansehen kann, so hat man nach §. 42 Anm. 2

$$\frac{\int(\alpha - n)^m}{\alpha^m} = \frac{1}{\alpha^m}\left(\frac{\alpha^{m+1}}{m+1} - \frac{m}{2}\int(\alpha - 1)^{m-1} - \frac{m \cdot m - 1}{2 \cdot 3}\int(\alpha - 1)^{m-2} - \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4}\int(\alpha - 1)^{m-3} - \ldots - \frac{1}{m+1}\int(\alpha - 1)^0 - \frac{1}{m+1}\right).$$

Hiernach erhält man also, wenn $x = \alpha$, und $n = \alpha - 1$ gesetzt wird, $\frac{\int(\alpha - x)^m \, dx}{\alpha^m}$

$- \frac{\int(\alpha - n)^m}{\alpha^m} = \frac{\alpha}{m+1} - \frac{\alpha}{m+1} +$

$\frac{m}{2} \frac{\int(\alpha - 1)^{m-1}}{\alpha^m} + \frac{m \cdot m - 1}{2 \cdot 3} \frac{\int(\alpha - 1)^{m-2}}{\alpha^m}$

$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\int(\alpha - 1)^{m-3}}{\alpha^m}$

$+ \ldots + \frac{1}{(m+1)\,\alpha^m} = \frac{m}{2} \frac{\int(\alpha-1)^{m-1}}{\alpha^m}$

$+ \frac{m \cdot m - 1}{2 \cdot 3} \frac{\int(\alpha - 1)^{m-2}}{\alpha^m} + \ldots +$

$\frac{1}{m+1} \frac{\int \alpha^0}{\alpha^m}$. Dies wäre also ein allgemeiner Ausdruck für die *Correction* der Verbindungsdauer, wenn man sie nach der Hypothese nur auf ganze Jahre berechnet hätte.

Danach wird für $m = 1$, oder für ein einziges Leben, die Correction $= \frac{1}{2}$, für $m = 2$, oder die Verbindung von zwey Personen, ist sie $= \frac{1}{2} - \frac{1}{6\alpha}$, für $m = 3$ wird sie $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\alpha}$, für $m = 4$ ist sie $= \frac{1}{2} - \frac{1}{3\alpha} + \frac{1}{30 \cdot \alpha^3}$ etc.

Anm. Man sieht hieraus, dafs wenn gleich die Correction für die Dauer eines einzigen Lebens vollkommen, und für die Verbindung zweier Leben beinahe $= \frac{1}{2}$ ist, sie doch bey den Verbindungsdauern der höhern Grade kleiner ausfalle, und dafs dieser Unterschied nicht unbeachtet bleiben dürfe. Es ergiebt

sich dies auch schon aus einer allgemeinen Betrachtung. Die vollständige Verbindungsdauer für m Personen vom Alter a ist nämlich $= \frac{\alpha}{m+1}$. Würde nun $m = 2\alpha$ oder gar gröfser, so wäre $\frac{\alpha}{m+1} < \frac{1}{2}$, und wenn man die Correction ohne Unterschied zu $\frac{1}{2}$ annehmen wollte, so würde sie in dem angegebenen Falle mehr betragen als die wirkliche mittlere Verbindungsdauer.

Anm. 2. Uebrigens ist für diese Correction, wenn sie, wie zuletzt im §. geschehen, auf Potenzen von α reducirt wird, kein allgemeines Gesetz anzugeben. Der Grund hiervon ist, weil auch für $\int n^m$, wenn der entwickelte Ausdruck auf Potenzen von n reducirt wird, kein allgemeines Gesetz aufzufinden ist, indem z. B. $\int n^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, $\int n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, dagegen $\int n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$.

§. 205.

Nach der nämlichen Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens, aber für *m Personen von verschiedenem Alter* a, b, c bis k, wozu die Altersergänzungen α, β, γ .. $\varkappa$ gehören sollen, wäre die mittlere Verbindungsdauer $=$

$$\frac{\int (\alpha - x)\ (\beta - x)\ (\gamma - x)\ ..\ (\varkappa - x)\, dx}{\alpha\ \beta\ \gamma\ ..\ \varkappa}.$$

Das Product der endlichen Factoren im Zähler ist

$$= (\alpha\,\beta\,\gamma\,..\,\varkappa) - Px + Qx^2 - Rx^3 + .. \pm Tx^{m-1} \mp x^m,$$

wo der Coefficient P gleich ist der

Summe aller Verbindungen nach m — 1 unter den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varkappa$, Q gleich der Summe der Verbindungen nach m — 2 unter denselben Zahlen, R = der Summe der Verbindungen nach m — 3 unter diesen Zahlen etc., und T = der Summe aller einzelnen Zahlen ist. Das letzte Glied, welches den Coefficienten 1 hat, wird bejahet, wenn m gerade, und verneint, wenn m ungerade ist. Man erhält also die Verbindungsdauer $= \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa} \times (\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa \int dx - P\int x\,dx + Q\int x^2\,dx - R\int x^3\,dx + \ldots \mp \int x^m\,dx) = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa} \times (\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa x - P\frac{x^2}{2} + Q\frac{x^3}{3} - R\frac{x^4}{4} + \ldots \mp \frac{x^{m+1}}{m+1})$. Da jedes Glied für sich = 0 wird, wenn man $x = 0$ setzt, so kömmt keine Constante hinzu. Setzt man also $x = \varkappa$, d. h. gleich der kleinsten Altersergänzung, so erhält man die ganze mittlere Verbindungsdauer.

Es sey z. B. m = 3 und die Altersergänzungen der drey Personen α, β, γ, wo γ die kleinste Zahl seyn mag, so wird die mittlere Verbindungsdauer $= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}[\alpha\beta\gamma^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\frac{\gamma^2}{2} + (\alpha + \beta + \gamma)\frac{\gamma^3}{3} - \frac{\gamma^4}{4}] = \gamma - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\frac{\gamma^2}{2} + (\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} +$

$$\frac{1}{\beta\gamma})\ \frac{\gamma^3}{3} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\ \frac{\gamma^4}{4} = \frac{\gamma}{2} - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})\ \frac{\gamma^2}{6} + \frac{1}{\alpha\beta}\ \frac{\gamma^3}{12}.$$

Auf dieselbe Weise findet man die mittlere Verbindungsdauer für vier Personen, deren ältsten die Altergänzung δ zugehört, $= \frac{\delta}{1.2} - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\ \frac{\delta^2}{2.3} + (\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma})\ \frac{\delta^3}{3.4} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\ \frac{\delta^4}{4.5}$.

Für fünf Leben, wovon e das älteste ist, wird die Verbindungsdauer $= \frac{\varepsilon}{1.2} - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta})\ \frac{\varepsilon^2}{2.3} + (\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\gamma\delta})\ \frac{\varepsilon^3}{3.4} - (\frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\beta\delta} + \frac{1}{\alpha\gamma\delta} + \frac{1}{\beta\gamma\delta})\ \frac{\varepsilon^4}{4.5} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\ \frac{\varepsilon^5}{5.6}$.

Anm. Wäre jede Altersergänzung $= \alpha$, so hätte man aus diesen Formeln wieder die mittlere Verbindungsdauer für drey Leben $= \frac{\alpha}{4}$, für vier Leben $= \frac{\alpha}{5}$ und für fünf Leben $= \frac{\alpha}{6}$.

§. 206.

Wollte man noch nach der Hypothese, aber nur auf volle Jahre, rechnen, so hätte man für m

Personen, deren Altersergänzungen α, β, γ .. $\varkappa$ sind, die mittlere Verbindungsdauer $=$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa}\int\overline{(\alpha-n)\,(\beta-n)\,(\gamma-n)\,..\,(\varkappa-n)},$$

wo für n die natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung von 1 bis $\varkappa - 1$, wenn $\varkappa$ die kleinste Altersergänzung ist, (oder auch bis $\varkappa$, da sodann der Factor $\varkappa - \varkappa = 0$ wird) gesetzt werden müfsen. Nun ist das allgemeine Glied der zu bestimmenden Reihe

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa}\,(\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa\,n^0 - P\,n^1 + Q\,n^2 - R\,n^3 + ..\,\overline{+}\,n^m),$$

wo P, Q, R etc. die im vorhergehenden §. angegebenen Coefficienten sind. Folglich wird das summatorische Glied $=$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa}\,(\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa\int n^0 - P\int n^1 + Q\int n^2 - R\int n^3 + ..\,\overline{+}\int n^m),$$

und wenn man in diesem summatorischen Gliede $n = \varkappa - 1$ setzt, so erhält man die mittlere Verbindungsdauer $=$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa}\,[\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa\int(\varkappa-1)^0 - P\int(\varkappa-1)^1 + Q\int(\varkappa-1)^2 - R\int(\varkappa-1)^3 + ..\,\overline{+}\int(\varkappa-1)^m].$$

Es sey z. B. wieder $m = 3$, so erhält man für die Altersergänzungen α, β und γ, wenn γ die kleinste derselben ist, die mittlere Verbindungsdauer

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\,[(\alpha\beta\gamma)\,(\gamma-1) - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\,(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{2}) + (\alpha+\beta+\gamma)\,(\frac{\gamma^3}{3} - \frac{\gamma^2}{2}$$

$$+ \frac{\gamma}{6}) - (\frac{\gamma^4}{4} - \frac{\gamma^3}{2} + \frac{\gamma^2}{4})] =$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} [\tfrac{1}{2}\alpha\beta\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\beta\gamma - \tfrac{1}{6}(\alpha + \beta)\gamma^3 +$$

$$\tfrac{1}{6}(\alpha + \beta)\gamma + \tfrac{1}{12}\gamma^4 - \tfrac{1}{12}\gamma^2] = \frac{\gamma}{2} - (\frac{1}{\alpha} +$$

$$\frac{1}{\beta}) \frac{\gamma^2}{6} + \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\gamma^3}{12} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) -$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\gamma}{12}.$$

Durch Subtraction des im gegenwärtigen §. angegebenen allgemeinen Ausdrucks von dem im vorigen §. bestimmten vollständigen Werthe der Verbindungsdauer erhielte man die Correction für dieselbe, falls sie nur auf ganze Jahre berechnet wäre,

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa} (\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa(\varkappa - \varkappa + 1) -$$

$$P(\frac{\varkappa^2}{2} - \frac{\varkappa^2}{2} + \frac{\varkappa}{2}) + Q(\frac{\varkappa^3}{3} - \frac{\varkappa^3}{3} +$$

$$\frac{\varkappa^2}{2} - \frac{\varkappa}{6}) - R(\frac{\varkappa^4}{4} - \frac{\varkappa^4}{4} + \frac{\varkappa^3}{2} - \frac{\varkappa^2}{4}) -$$

$$+ \ldots - \ldots) = 1 - \frac{1}{\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa} [P \frac{\varkappa}{2} - Q(\frac{\varkappa^2}{2}$$

$$- \frac{\varkappa}{6}) + R(\frac{\varkappa^3}{2} - \frac{\varkappa^2}{4}) - \ldots + \ldots].$$

Für drey Personen von den Altersergänzungen α, β und γ wird also, wenn γ darunter die kleinste Zahl ist, die Correction $= \frac{1}{\alpha\beta\gamma} [\alpha\beta\gamma - (\alpha\beta$

$$+ \alpha\gamma + \beta\gamma)\frac{\gamma}{2} + (\alpha + \beta + \gamma)(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{6}) -$$

$$\left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^2}{4}\right)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\gamma}{12},$$

§. 207.

Wird die Verbindungsdauer im Allgemeinen, *ohne Rücksicht auf eine bestimmte Sterbensordnung*, gesucht, sind die Personen vom Alter a, b, c bis k, wo k das älteste Leben seyn mag, und bezeichnen A, B, C bis K die dazu gehörigen Zahlen der Lebenden, so ist, auf ganze Jahre gerechnet, die mittlere Verbindungsdauer $= \frac{1}{ABC..K}(A^1B^1C^1..K^1 + A^2B^2C^2..K^2 + .. + A^{\overline{z}}B^{\overline{z}}C^{\overline{z}}..K^{\overline{z}})$, wo z die Altersergänzung der ältsten Person ist, oder auch

$$E(a\,b\,c\,..\,k) = \frac{\int(A'^1 B'^1 C'^1\,..\,K'^1)}{ABC\,..\,K}.$$

Ferner ist $\frac{A^1B^1C^1\,..\,K^1}{ABC\,..\,K} +$

$$\frac{A^2B^2C^2\,..\,K^2}{ABC\,..\,K} + .. + \frac{A^{\overline{z}}B^{\overline{z}}C^{\overline{z}}..K^{\overline{z}}}{ABC\,..\,K} =$$

$$\frac{(A - \Delta A)\,B^1C^1\,..\,K^1}{ABC\,..K} +$$

$$\frac{(A - \Delta A - \Delta A^1)\,B^2C^2\,..\,K^2}{ABC\,..\,K} +$$

$$\frac{(A - \Delta A - \Delta A^1 - \Delta A^2)\,B^3C^3\,..\,K^3 + ..}{ABC\,..\,K} =$$

$$\frac{A}{A}\left(\frac{B^1C^1..K^1 + B^2C^2..K^2 + B^3C^3..K^3 + ..}{BC\,..\,K}\right) -$$

$$\frac{\Delta A}{A}\left(\frac{B^1C^1..K^1 + B^2C^2..K^2 + B^3C^3..K^3 + ..}{BC\,..\,K}\right) -$$

$$\frac{\Delta A^1}{A}\left(\frac{B^2\,C^2\,..\,K^2}{B\,C\,..\,K}+\frac{B^3\,C^3\,..\,K^3}{B\,C\,..\,K}+..\right)-$$

$$\frac{\Delta A^2}{A}\left(\frac{B^3\,C^3\,..\,K^3}{B\,C\,..\,K}+..\right)-..=$$

$$\frac{f(B'^1\,C'^1\,..\,K'^1)}{B\,C\,..\,K}-\frac{\Delta A}{A}\,\frac{f(B'^1\,C'^1\,..\,K'^1)}{B\,C\,..\,K}$$

$$-\frac{\Delta A^1}{A}\,\frac{f(B'^2\,C'^2\,..\,K'^2)}{B\,C\,..\,K}-$$

$$\frac{\Delta A^2}{A}\,\frac{f(B'^3\,C'^3\,..\,K'^3)}{B\,C\,..\,K}-..$$ Nun ist

$\frac{f(B'^1\,C'^1\,..\,K'^1)}{B\,C\,..\,K}=E(b\,c\,..\,k)$, d. i. gleich der Verbindungsdauer für die um einen Grad niedrigere Verbindung unter den Personen B, C .. bis K; imgleichen ist $\frac{f(B'^2\,C'^2\,..\,K'^2)}{B\,C\,..\,K}=$

$$\frac{B^1\,C^1\,..\,K^1}{B\,C\,..\,K}\,\frac{f(B'^2\,C'^2\,..\,K'^2)}{B^1\,C^1\,..\,K^1}=$$

$$\frac{B^1\,C^1\,..\,K^1}{B\,C\,..\,K}\,E\overline{(b+1)\,(c+1)\,..\,(k+1)};$$

ebenfalls wird $\frac{f(B'^3\,C'^3\,..\,K'^3}{B\,C\,..\,K}=$

$$\frac{B^2\,C^2\,..\,K^2}{B\,C\,..\,K}\,\frac{f(B'^3\,C'^3\,..\,K'^3)}{B^2\,C^2\,..\,K^2}=$$

$$\frac{B^2\,C^2\,..\,K^2}{B\,C\,..\,K}\,E\overline{(b+2)\,(c+2)\,..\,(k+2)}$$

etc. Also hat man $E\overline{a\,b\,c\,..\,k}=E\overline{b\,c\,..\,k}-$

$$\frac{\Delta A}{A}\,E\overline{bc\,..\,k}-\frac{\Delta A^1}{A}\cdot\frac{B^1\,C^1\,..\,K^1}{B\,C\,..\,K}\times$$

$$E\overline{(b+1)(c+1)\,..\,(k+1)} - \frac{\Delta A^{\alpha}\,B^{\alpha}C^{\alpha}\,..\,K^{\alpha}}{A\,.\,\overline{B\,C\,..\,K}}$$

$$\times\, E\overline{(b+2)\,(c+2)\,..\,(k+2)} - \,..$$

Hiernach findet man also die mittlere Verbindungsdauer eines jeden Grades aus der mittleren Dauer der um einen Grad niedrigeren Verbindung; indefsen hat der Ausdruck für E (a b c .. k) eben so viele Glieder als α, oder die Altersergänzung der ältesten Person, Einheiten enthält.

Uebrigens könnte man hier eben so, wie früher bey der mittleren Lebensdauer und der Verbindungsdauer unter zwey Personen gezeigt worden, anstatt der Decremente die Differenzen derselben gebrauchen; indefsen müfste man dann zugleich, anstatt der Summen der bestehenden Vereine vom Grade m — 1, die zweiten Summen dieser Zahlen berechnen.

§. 208.

Weiter hat man, wenn wieder E (abc .. k) gesucht wird, $\frac{A^{\alpha}\,B^{\alpha}\,C^{\alpha}\,..\,K^{\alpha}}{A\,B\,C\,..\,K} =$

$$\frac{A\,B - \Delta(A\,B)}{A\,B}\,.\,\frac{C^{\alpha}\,..\,K^{\alpha}}{C\,..\,K}\,,$$ ebenfalls

$$\frac{A^{\alpha}B^{\alpha}C^{\alpha}\,..\,K^{\alpha}}{A\,B\,C\,..\,K} = \frac{AB - \Delta(AB) - \Delta(A^{\alpha}B^{\alpha})}{A\,B}\,.\,\frac{C^{\alpha}\,..\,K^{\alpha}}{C\,..\,K}\,,$$

auch $\frac{A^{\alpha}\,B^{\alpha}\,C^{\alpha}\,..\,K^{\alpha}}{A\,B\,C\,..\,K} =$

$$\frac{AB - \Delta(AB) - \Delta(A^{\alpha}B^{\alpha}) - \Delta(A^{\alpha}B^{\alpha})}{A\,B}\,.\,\frac{C^{\alpha}\,..\,K^{\alpha}}{C\,..\,K}$$

etc. Also ist $E(abc..k)$ oder $\frac{A^1 B^1 C^1 .. K^1}{ABC..K}$

$$+ \frac{A^2 B^2 C^2 .. K^2}{ABC..K} + \frac{A^3 B^3 C^3 .. K^3}{ABC..K}$$

$$+ .. = \frac{AB}{AB}\left(\frac{C^1..K^1 + C^2..K^2 + C^3..K^3 + ..}{C..K}\right) -$$

$$\frac{\Delta(AB)}{AB}\left(\frac{C^1..K^1 + C^2..K^2 + C^3..K^3 + ..}{C..K}\right) -$$

$$\frac{\Delta(A^1 B^1)}{AB}\left(\frac{C^2..K^2 + C^3..K^3 + ..}{C..K}\right) -$$

$$\frac{\Delta(A^2 B^2)}{AB}\left(\frac{C^3..K^3 + ..}{C..K}\right) - ...$$ Da nun wieder

$$\frac{C^1..K^1 + C^2..K^2 + C^3..K^3 + ..}{C..K} = E\overline{c..k},$$ auch

$$\frac{C^2..K^2 + C^3..K^3 + ..}{C..K} = \frac{C^1..K^1}{C..K} \cdot \frac{C^2..K^2 + C^3..K^3 + ..}{C^1..K^1} =$$

$$\frac{C^1..K^1}{C..K} E\overline{(c+1)..(k+1)},$$ und

$$\frac{C^3..K^3 + C^4..K^4 + ..}{C..K} = \frac{C^2..K^2}{C..K} \cdot \frac{C^3..K^3 + C^4..K^4 + ..}{C^2..K^2}$$

$$= \frac{C^2..K^2}{C..K} E\overline{(c+2)..(k+2)}$$ etc., so hat man auch

$$E\overline{abc..k} = E\overline{c..k} - \frac{\Delta(AB)}{AB} E\overline{c..k} - \frac{\Delta(A^1 B^1)}{AB} \frac{C^1..K^1}{C..K} \times$$

$$E\overline{(c+1)\,..\,(k+1)} - \frac{\Delta(A^2\,B^2)}{A\,B}\,\frac{C^2\,..\,K^2}{C\,..\,K}\times$$

$E\overline{(c+2)\,..\,(k+2)}$ etc., wo also die Verbindungsdauer für m Personen durch die Decremente der Verbindungen aus zwey Personen und die Verbindungsdauern für m — 2 Personen ausgedruckt ist, jedoch wieder so viel Glieder zu berechnen sind als die Altersergänzung der ältsten Person Einheiten enthält.

Anm. Auch hier könnte man übrigens wieder anstatt der Decremente der Verbindungen unter zwey Personen die Differenzen dieser Decremente gebrauchen; indefsen mufste man dann zugleich die zweiten Summen der bestehenden Vereine aus den übrigen m — 2 Personen berechnen.

Ueberhaupt ergiebt es sich, dafs man im Allgemeinen die Verbindungsdauer unter m Personen durch die Verbindungsdauern unter m — n Personen finden könne, dafs man jedoch dabey der Decremente der Verbindungen unter n Personen oder ihrer Differenzen, oder auch der Theile, woraus diese Gröfsen bestehen, als Factoren bedürfe.

§. 209.

Hätte man die mittlere Verbindungsdauer für die Personen A B C .. K, auf ganze Jahre berechnet, gefunden und suchte man die *Correction*, um die vollständige Verbindungsdauer zu erhalten, so könnte man dazu auf folgendem Wege kommen.

Wenn man zuerst $\Delta(A\,B\,C\,..\,K)$, oder das Decrement, das zu A B C .. K gehört, bestimmt, so ist solches $= A\,B\,C\,..\,K - A^1\,B^1\,C^1\,..\,K^1$. Nun ist $A^1\,B^1\,C^1\,..\,K^1 =$

$$(A - \Delta A)(B - \Delta B)(C - \Delta C) \ldots (K - \Delta K)$$
$$= A\,B\,C\,D \ldots K -$$
$$\left\{\begin{array}{c} A\,B\,D \ldots K\,\Delta\,C \\ A\,C\,D \ldots K\,\Delta\,B \\ B\,C\,D \ldots K\,\Delta\,A \\ + \ldots \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} A\,D \ldots K\,\Delta\,B.\Delta\,C \\ B\,D \ldots K\,\Delta\,A.\Delta\,C \\ C\,D \ldots K\,\Delta\,A.\Delta\,B \\ + \ldots \end{array}\right\}$$
$$- \ldots + \ldots \mp \Delta A \,.\, \Delta B \,.\, \Delta C \ldots \Delta K.$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks ist ein Product aus den m Factoren A, B, C bis K; das zweite Glied ist die Summe aller Producte von m — 1 Factoren, welche aus den m Hauptzahlen A B C .. K genommen werden können, und jedes Product ist multiplicirt mit dem Decrement derjenigen Hauptzahl, die im Producte nicht als Factor enthalten ist; das dritte Glied ist die Summe aller Producte von m — 2 Factoren, die aus den gegebenen m Hauptzahlen genommen werden können, wovon jedes Product noch mit dem Producte derjenigen zwey Decremente multiplicirt ist, deren zugehörige Hauptzahlen in dem erstern Producte nicht vorkommen; eben so ist jedes nte Glied die Summe aller Producte von je m — n + 1 Factoren, die aus den m Hauptzahlen genommen werden können, und jedes Product ist noch multiplicirt mit dem Producte aus denen n — 1 Decrementen, deren zugehörige Hauptzahlen in dem erstern Producte nicht enthalten sind; das letzte Glied endlich ist lediglich ein Product der Decremente sämmtlicher m Hauptzahlen. Bezeichnet man diese Glieder vom zweiten an der Reihe nach mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, etc., so ist also

$A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} .. K^{\frac{1}{2}} = A B C .. K - \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} - \mathfrak{R} + \mathfrak{S} - .. \mp \Delta A \; \Delta B \; \Delta C .. \Delta K$, und

$\Delta (A B C .. K) = A B C .. K - A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} .. K^{\frac{1}{2}}$

$= \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} + \mathfrak{R} - \mathfrak{S} + .. \mp \Delta A \Delta B \; \Delta C .. \Delta K.$

Nun ist ferner die Anzahl der Vereine nach m, welche im ersten Jahre nach Verlauf der Zeit x existiren, =

$(A - x\Delta A) (B - x\Delta B) (C - x\Delta C) .. (K - x\Delta K)$, und die Zeit, welche diese Vereine während eines Augenblicks durchleben, =

$(A - x\Delta A) (B - x\Delta B) (C - x\Delta C) .. (K - x\Delta K) \, dx$

$= A B C .. K \, dx - \mathfrak{P} \, x \, dx + \mathfrak{Q} \, x^2 dx - \mathfrak{R} \, x^3 dx + .. \mp \Delta A \; \Delta B \; \Delta C .. \Delta K x^m \, dx;$

folglich ist die Summe der Dauer dieser Verbindungen während des ersten Jahrs =

$A B C .. K \int dx - \mathfrak{P} \int x \, dx + \mathfrak{Q} \int x^2 dx - \mathfrak{R} \int x^3 dx + .. \mp \Delta A \; \Delta B \; \Delta C .. \Delta K \int x^m dx.$

Wenn man nun integrirt und demnächst $x = 1$ setzt, so erhält man die Dauer aller Verbindungen während des ganzen ersten Jahrs =

$A B C .. K - \frac{1}{2} \mathfrak{P} + \frac{1}{3} \mathfrak{Q} - \frac{1}{4} \mathfrak{R} + \frac{1}{5} \mathfrak{S} - .. \mp \frac{1}{m+1} \Delta A \; \Delta B \; \Delta C .. \Delta K.$ Folglich ist das für das erste Jahr zu der Dauer aller Verbindungen hinzuzusetzende Stück =

$ABC .. K - \frac{1}{2} \mathfrak{P} + \frac{1}{3} \mathfrak{Q} - \frac{1}{4} \mathfrak{R} + \frac{1}{5} \mathfrak{S} - .. - A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} .. K^{\frac{1}{2}} = \Delta (A B C .. K) - \frac{1}{2} (\mathfrak{P} - \mathfrak{Q} + \mathfrak{R} - \mathfrak{S} + ..) - \frac{1}{2 \cdot 3} \mathfrak{Q} + \frac{2}{2 \cdot 4} \mathfrak{R} - \frac{3}{2 \cdot 5} \mathfrak{S} + ..$

$= \frac{1}{2}\Delta(ABC\,..\,K) - \frac{1}{2\cdot 3}\mathfrak{Q} + \frac{2}{2\cdot 4}\mathfrak{R} - \frac{3}{2\cdot 5}\mathfrak{S} + ..$ Bezeichnen ferner $\mathfrak{P}^1$, $\mathfrak{Q}^1$, $\mathfrak{R}^1$, $\mathfrak{S}^1$, etc. für das zweite Jahr, imgleichen $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{Q}^2$, $\mathfrak{R}^2$, $\mathfrak{S}^2$ etc. für das dritte Jahr etc. etc. das Nämliche, was $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, etc. für das erste Jahr ausdrucken, so erhält man das hinzusetzende Stück für das zweite Jahr $= \frac{1}{2}\Delta(A^1\,B^1\,C^1\,..\,K^1) - \frac{1}{2\cdot 3}\mathfrak{Q}^1 + \frac{2}{2\cdot 4}\mathfrak{R}^1 - \frac{3}{2\cdot 5}\mathfrak{S}^1 + ..$, so wie für das dritte Jahr $= \frac{1}{2}\Delta(A^2\,B^2\,C^2\,..\,K^2) - \frac{1}{2\cdot 3}\mathfrak{Q}^2 + \frac{2}{2\cdot 4}\mathfrak{R}^2 - \frac{3}{2\cdot 5}\mathfrak{S}^2 + ..$ etc. etc.

Für alle Jahre zusammen giebt dies

$\frac{1}{2}\Delta(ABC\,..\,K) + \frac{1}{2}\Delta(A^1\,B^1\,C^1\,..\,K^1) + \frac{1}{2}\Delta(A^2\,B^2\,C^2\,..\,K^2) + .. - \frac{1}{2\cdot 3}(\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^1 + \mathfrak{Q}^2 + ..) + \frac{2}{2\cdot 4}(\mathfrak{R} + \mathfrak{R}^1 + \mathfrak{R}^2 + ..) - \frac{3}{2\cdot 5}(\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^1 + \mathfrak{S}^2 + ..) + .. = \frac{1}{2}ABC..K - \frac{1}{2\cdot 3}\int\mathfrak{Q}^0 + \frac{2}{2\cdot 4}\int\mathfrak{R}^0 - \frac{3}{2\cdot 5}\int\mathfrak{S}^0 + ..$,

wo $\int\mathfrak{Q}^0$, $\int\mathfrak{R}^0$, $\int\mathfrak{S}^0$ etc. die Summen von $\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^1 + \mathfrak{Q}^2 + ..$, von $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}^1 + \mathfrak{R}^2 + ..$ etc. bezeichnen, welche Summen so viele Theile enthalten als z, oder die Altersergänzung der ältsten Person, Einheiten hat.

Hiernach findet man also die Correction der mittleren Verbindungsdauer =

$$\frac{1}{ABC..K}\left(\tfrac{1}{2}ABC..K - \frac{1}{2.3}\int\mathfrak{Q}^{o} + \frac{2}{2.4}\int\mathfrak{R}^{o} - \frac{3}{2.5}\int\mathfrak{S}^{o} + ..\right) = \frac{1}{2} - \frac{\int\mathfrak{Q}^{o}}{2.3\,ABC..K} + \frac{2\int\mathfrak{R}^{o}}{2.4\,ABC..K} - \frac{3\int\mathfrak{S}^{o}}{2.5\,ABC..K} + ..$$

Wendet man dies auf ein einziges Leben an, so wird die Correction $= \frac{1}{2}$, da hier $\int\mathfrak{Q}^{o}$, $\int\mathfrak{R}^{o}$ etc. $= 0$ sind. Für zwey Leben wäre die Correction $= \frac{1}{2} - \frac{\int\mathfrak{Q}^{o}}{2.3\,AB}$ (indem $\int\mathfrak{R}^{o}$ etc. $= 0$ ist) $= \frac{1}{2} - \frac{\int(\Delta A^{o}\,\Delta B^{o})}{6\,AB}$, wie oben §. 126. Für drey Leben erhielte man die Correction $= \frac{1}{2} - \frac{\int(A^{o}\Delta B^{o}\Delta C^{o}) + \int(B^{o}\Delta A^{o}\Delta C^{o}) + \int(C^{o}\Delta A^{o}\Delta B^{o})}{6\,ABC} + \frac{\int(\Delta A^{o}\,\Delta B^{o}\,\Delta C^{o})}{4\,ABC}$. etc. etc.

Uebrigens sieht man leicht, dafs man oben, anstatt $(A - x\Delta A)\,(B - x\Delta B)\,(C - x\Delta C)..(K - x\Delta K)$ auch setzen könnte $[A^{1} + (1 - x)\Delta A]\,[B^{1} + (1 - x)\Delta B]\,[C^{1} + (1 - x)\Delta C]..[K^{1} + (1 - x)\Delta K]$, und dafs man hienach $\Delta(ABC..K) = {}^{1}\mathfrak{P} + {}^{1}\mathfrak{Q} + {}^{1}\mathfrak{R} + {}^{1}\mathfrak{S} + ..$ erhielte, wo ${}^{1}\mathfrak{P}$, ${}^{1}\mathfrak{Q}$, ${}^{1}\mathfrak{R}$ etc. eben solche Summen von Producten als vorher $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ etc. sind, nur mit dem Unterschiede, dafs

in $^{1}\mathfrak{P}$, $^{1}\mathfrak{Q}$, $^{1}\mathfrak{R}$ etc. zwar auch die Decremente des ersten Jahrs, aber die Hauptzahlen des zweiten Jahrs, nämlich A^{1}, B^{1} etc. gesetzt werden müfsen. Hiernach würde man die Correction für die Verbindungsdauer $= \frac{1}{ABC..K}\left(\frac{f'^{1}\mathfrak{P}}{2} + \frac{f'^{1}\mathfrak{Q}}{3} + \frac{f'^{1}\mathfrak{R}}{4} + \frac{f'^{1}\mathfrak{S}}{5} + ..\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{ABC..K}\left(\frac{f'^{1}\mathfrak{Q}}{2.3} + \frac{2f'^{1}\mathfrak{R}}{2.4} + ..\right)$ erhalten, wo alle Glieder nach $\frac{1}{2}$ verneint sind. Dabey mufs man jedoch nicht aufser Acht lafsen, dafs wenn z. B. z die kleinste Altersergänzung ist und zu K gehört, alle Producte, worin $K^{\overline{z}}$ vorkömmt, $= 0$ werden, die übrigen Producte aber, worin die Decremente von K vorkommen, erst dann $= 0$ werden, wenn sie in $\Delta K^{\overline{z}}$ multiplicirt sind, und dafs folglich die Reihen der letzteren Producte ein Glied mehr enthalten als die Reihen der ersteren.

§. 209. b.

Wenn man in der Formel des vorhergehenden §. durchgängig $A^{\overline{n-1}} - A^{\overline{n}}$ anstatt $\Delta A^{\overline{n-1}}$, $B^{\overline{n-1}} - B^{\overline{n}}$ anstatt $\Delta B^{\overline{n-1}}$ etc. setzt, so kann man die vollständige Verbindungsdauer noch auf eine andre Art ausdrucken. Es wird nämlich hiernach die vollständige Lebensdauer eines Einzelnen

vom Alter a $= \frac{1}{2}\left(\frac{A^{-1}}{A} E(a-1) + Ea\right)$.

Die vollständige Verbindungsdauer für zwey Personen A und B ist $\frac{1}{3}\frac{A^{-1}B^{-1}}{A\,B} E\overline{(a-1)\,(b-1)} +$

$\frac{1}{6}\left[\frac{A^{-1}}{A} E\overline{(a-1)\,b} + \frac{B^{-1}}{B} E\overline{a\,(b-1)}\right] +$

$\frac{1}{3} E\overline{a\,b}$. Noch wird die vollständige Verbindungsdauer für drey Personen A, B und C $=$

$\frac{1}{4}\frac{A^{-1}B^{-1}C^{-1}}{A\,B\,C} E\overline{(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}$

$+ \frac{1}{12}\left[\frac{A^{-1}B^{-1}}{A\,B} E\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} +\right.$

$\frac{A^{-1}C^{-1}}{A\,C} E\overline{(a-1)\,b\,(c-1)} +$

$\left.\frac{B^{-1}C^{-1}}{B\,C} E\overline{a\,(b-1)\,(c-1)}\right] +$

$\frac{1}{12}\left[\frac{A^{-1}}{A} E\overline{(a-1)\,b\,c} +\right.$

$\frac{B^{-1}}{B} E\overline{a\,(b-1)\,c} +$

$\left.\frac{C^{-1}}{C} E\,a\,b\,(c-1)\right] + \frac{1}{4} E\overline{a\,b\,c}.$

Wenn man überhaupt mit $E\,M^{\overline{-1}}$ die Verbindungsdauer von m Personen bezeichnet, deren Alter durchgängig um 1 Jahr zurückgerechnet ist, ferner mit $E\,(M-I)^{\overline{-1}}.I$, $E\,(M-II)^{\overline{-1}}.II$ etc. die Dauer irgend einer Verbindung nach m, wobey für $m-1$, $m-2$ etc. Personen das Alter um ein Jahr zurück gerechnet wird, für die übrigen 1, 2 etc. Personen aber unverändert bleibt, sodann mit

$$\frac{M^{\overline{-1}}}{M}\,E\,M^{\overline{-1}},\quad \frac{(M-I)^{\overline{-1}}}{M-I}\,E\,(M-I)^{\overline{-1}}.I,$$

$$\frac{(M-II)^{\overline{-1}}}{M-II}\,E\,(M-II)^{\overline{-1}}.II$$

etc. andeutet, dafs jede der gedachten Verbindungsdauern mit dem Producte der m, $m-1$, $m-2$ etc. Zahlen der Lebenden für das nämliche Jahr dividirt, und mit dem Producte derselben, jedoch um ein Jahr zurückgerechneten, Zahlen der Lebenden multiplicirt werden soll, auch endlich die Summen der gleichnamigen solchergestalt bestimmten und mit den angegebenen Quotienten der zugehörigen Zahlen der Lebenden multiplicirten Verbindungsdauern mit

$$S\,\frac{(M-I)^{\overline{-1}}}{M-I}\,E\,(M-I)^{\overline{-1}}.I,$$

$$S\,\frac{(M-II)^{\overline{-1}}}{M-II}\,E\,(M-II)^{\overline{-1}}.II$$

etc. bezeichnet, so ist die vollständige Verbindungs-

$$\text{dauer für m Personen} = \frac{1}{m+1}\left[\frac{M^{-1}}{M} E M^{-1}\right.$$

$$+ \frac{1}{m} S\frac{(M-1)^{-1}}{M-1} E(M-1)^{-1}.I +$$

$$\frac{1.2}{m.m-1} S\frac{(M-II)^{-1}}{M-II} E(M-II)^{-1}.II +$$

$$\frac{1.2.3}{m.m-1.m-2} S\frac{(M-III)^{-1}}{M-III} \times$$

$$\left. E(M-III)^{-1}.III + .. + EM\right].$$

Sind die m Personen alle von gleichem Alter, so ist die Summe der Combinationen des zweiten Gliedes $= \frac{m}{1}$, des dritten Gliedes $= \frac{m.m-1}{1.2}$, des vierten Gliedes $= \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ etc., und der obige Ausdruck wird dann $=$

$$\frac{1}{m+1}\left(\frac{M^{-1}}{M} EM +\right.$$

$$\frac{(M-1)^{-1}}{M-1} E(M-1)^{-1}.1 +$$

$$\left.\frac{(M-II)^{-1}}{M-II} E(M-II)^{-1}.II + ..\right).$$

Anm. Der Beweis dieses Satzes, der auf der Lehre von den Combinationen beruhet, ist nicht schwierig, aber weitläufig. Ich habe geglaubt ihn übergehen zu können, da die Anwendung der aufgestellten Formel auf die höhern Verbindungsdauern doch zu mühsam wird.

§. 210.

Nach dem Vorhergehenden ist die Berechnung der Verbindungsdauer mehrerer Personen, wenn dabey auch nur ganze Jahre in Betracht kommen, ziemlich weitläufig. Es giebt indefsen noch eine leichtere Methode, die Verbindungsdauer für drey, auch allenfalls vier Personen näherungsweise zu finden. Man berechnet nämlich, wenn die Dauer der Verbindung für Personen vom Alter a, b und c zu bestimmen ist, wovon A die jüngste und C die älteste seyn mag, zuerst die Dauer der Verbindung zwischen B und C, d. i. E (b c), sieht diese Verbindungsdauer als die Lebensdauer eines Einzigen an und sucht in der Mortalitätstafel, welchem einzelnen Alter diese Lebensdauer zugehört. Heifst dieses Alter m, so sucht man wieder die mittlere Verbindungsdauer für die zwey Leben a und m oder E (a m), und nimmt dann diese als die Verbindungsdauer für die drey Leben, oder für E (a b c), an.

Z. B. Es wird die Verbindungsdauer für die drey Leben (40 . 50 . 50) gesucht. Hier hat man aus der Süfsmilchschen Tabelle E (50 . 50) = 10,97, welches die mittlere Lebensdauer für eine Person vom Alter 62,32 ist. Nun sucht man ferner nach der Tabelle E (40 . 62,32), wofür man 9,17 findet, welches dann als mittlere Verbindungsdauer der drey Personen gelten kann.

Sind vier Personen vom Alter a, b, c, d, nach dieser Ordnung steigend, gegeben, so sucht man

die Verbindungsdauer für C und D oder E (c d), demnächst, wenn dies die mittlere Dauer eines einzigen Lebens von Alter m ist, die mittlere Verbindungsdauer zwischen b und m oder E (b m), und wenn diese Zeit als mittlere Dauer eines einzigen Lebens wieder dem Alter n gehört, die Dauer der Verbindung zwischen a und n oder E (a n), welches dann anstatt E (a b c d) angenommen wird.

Man könnte auch zuerst die Verbindungsdauer der jüngeren Leben suchen, und dann zu den ältern fortgehen; die Werthe stimmen indefsen nicht durchgängig mit den vorhin gefundenen Werthen überein, und es scheint, dafs man im Ganzen genommen auf dem ersten Wege dem wahren Werthe am nächsten komme. Wird für mehr als drey Leben die Verbindungsdauer gesucht, so kann man für dieselbe Gröfse viele verschiedene Werthe erhalten, von denen vielleicht keiner mit dem wahren Werthe übereinstimmt. Die ganze Methode ist ein Nothbehelf und führt, wie schon gesagt, nur zur Näherung. In wie weit sich die Gränzen ihrer Anwendbarkeit beurtheilen lafsen, wird in der Anmerkung gezeigt werden.

Anm. Bey der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens ist es leicht, die Gränzen der Zuverläfsigkeit der im Texte angeführten Näherungsrechnung zu bestimmen. Wenn nämlich drey Alter a, b und c, mit ihren Altersergänzungen α, β, und γ, gegeben sind, und daraus nach der erwähnten Methode die mittlere Verbindungsdauer gefunden werden soll, so hat man zuerst die mittlere Dauer der Verbindung der Leben b und c

oder $E(b\,c) = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}$ (§. 127). Wenn dies die mittlere Lebensdauer für das Alter m ist, und die dazu gehörige Altersergänzung μ heifst, so ist $\mu = 2\,E(b\,c) = \gamma - \frac{\gamma^2}{3\beta}$. Ferner ist auf eben die Weise $E(a\,m) = \frac{2}{\mu} - \frac{\mu^2}{6\alpha} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{\gamma^2}{6\alpha} + \frac{2\cdot\gamma^3}{6\cdot 3\cdot\alpha\beta} - \frac{\gamma^4}{6\cdot 9\cdot\alpha\beta^2}$

$= \frac{\gamma}{2} - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})\,\frac{\gamma^2}{6} + \frac{\gamma^3}{9\cdot\alpha\beta} - \frac{\gamma^4}{54\cdot\alpha\beta^2}$,

welches nach der angegebenen Methode für $E(a\,b\,c)$ angenommen wird. Der wahre Werth dieser Verbindungsdauer nach derselben Hypothese ist nach §. 205 $= \frac{\gamma}{2} - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})\,\frac{\gamma^2}{6} + \frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\gamma^3}{12}$. Ziehet man nun diesen letzen Werth von dem vorhin gefundenen Näherungswerthe ab, so erhält man den Unterschied $= (\frac{1}{9} - \frac{1}{12})\,\frac{\gamma^3}{\alpha\beta} - \frac{\gamma^4}{54\,\alpha\beta^2}$

$= \frac{\gamma^3}{36\,\alpha\beta} - \frac{\gamma^4}{54\,\alpha\beta^2} = \frac{\gamma^3}{18\,\alpha\beta}\,(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{3\beta})$,

und um so viel ist der gefundene Näherungswerth zu grofs. Da dieser Ausdruck $= 0$ wird, wenn $\gamma = 0$ ist, und am gröfsten, wenn $\gamma = \frac{8}{9}\,\beta$ ist, wo er $= \frac{81}{819}\,\frac{\beta^2}{2\,\alpha}$, so wird der Unterschied gröfser, je mehr γ sich dem Werthe von β nähert.

Will man nach der nämlichen Näherungsmethode die mittlere Verbindungsdauer für vier Personen vom Alter a, b, c und d, und den Altersergänzungen α, β, γ und δ, suchen, so

findet man sie $= \frac{\delta}{2} - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}) \frac{\delta^2}{6} +$

$(\frac{1}{12\,\beta\gamma} + \frac{1}{9\,\alpha\beta} + \frac{1}{9\,\alpha\gamma})\,\delta^3 - (\frac{5}{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\beta^2} +$

$\frac{1}{\alpha\gamma^2})\,\frac{\delta^4}{54} + (\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma^2})\,\frac{\delta^5}{54} - \frac{\delta^6}{216\,\alpha\beta^2\gamma^2}$.

Der wahre Werth ist nach §. 205 vorher $= \frac{\delta}{2} - (\frac{1}{\alpha}$

$+ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\,\frac{\delta^2}{6} + (\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma})\,\frac{\delta^3}{12} -$

$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\delta^4}{20}$, und der Ueberschufs des Näherungswerthes über

den letztern ist $= (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\,\frac{\delta^3}{36\,\alpha} - \frac{23}{540}\,\frac{\delta^4}{\alpha\beta\gamma}$

$- (\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2})\,\frac{\delta^4}{54\,\alpha} + (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\,\frac{\delta^5}{54\,\alpha\beta\gamma} -$

$\frac{\delta^6}{216\,\alpha\beta^2\gamma^2}$.

Es ergiebt sich indefsen von selbst, dafs man, wenn einmal nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens gerechnet werden soll, eben so leicht unmittelbar nach der im §. 205 angegebenen Formel den Werth der Verbindungsdauer finden kann als mittelst der Näherungsmethode, wenn man bey dieser letztern, wie es nöthig ist, zugleich die Correction berechnen will.

Dagegen würde es bey Berechnung der Verbindungsdauer für mehrere Personen nach andern Mortalitätslisten sehr zur Abkürzung der Arbeit dienen, wenn die Verbindungsdauer vermittelst der angegebenen Näherungsmethode zugleich mit der Correction, oder wenigstens mit Bestimmung naher Gränzen des Werths, gefunden werden könnte, diese letzte Bedingung ist indefsen nicht zu erfüllen. Sucht man nämlich auf die

gedachte Weise die mittlere Verbindungsdauer z. B. für 3 Personen A, B und C, so hat man $E(bc) = Ec - \frac{1}{BC}(\Delta B \int C'^{1} + \Delta B^{1} \int C'^{2} + \ldots)$ (§. 123). Wenn das einzelne Alter, dem diese Zeit als mittlere Lebensdauer zugehört, $= m$ und M die Anzahl der Lebenden vom Alter m ist, so erhält man, auf den Fall dafs die dritte Person A hinzukömmt, $E(am) = Em - \frac{1}{A.M}(\Delta A \int M'^{1} + \Delta A^{1} \int M'^{2} + \ldots)$, welches für $E(abc)$ angenommen wird. Es ist aber bey den erfahrungsmäfsigen Mortalitätslisten M nicht aus B, C oder den übrigen gegebenen Gröfsen theoretisch zu finden und daher keine Correction für den Näherungswerth herzuleiten.

Indefsen scheinen, so viel sich aus den gefundenen einzelnen Werthen urtheilen läfst, die auf die hier angegebene Weise berechneten Verbindungsdauern nach der Süfsmilchschen Sterblichkeitsliste weniger von dem wahren Werthe abzuweichen, als die auf eben die Weise bestimmten Verbindungsdauern nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens, wie sich aus den hier folgenden Beispielen ergiebt.

Verbindungsdauer nach Süfsmilch.

Altersverbindung.	*Wahrer Werth.*	*NäherungsWerth.*
E (25 . 35 . 45)	11,91	11,98
E (35 . 45 . 45)	10,85	10,82
E (40 . 40 . 50)	10,23	10,26
E (40 . 50 . 50)	9,11	9,17
E (45 . 45 . 55)	8,61	8,64
E (45 . 55 . 55)	7,65	7,65
E (50 . 50 . 60)	7,03	7,05
E (50 . 60 . 60)	6,17	6,18
E (55 . 55 . 65)	5,72	5,73
E (55 . 65 . 65)	4,88	4,96
E (60 . 60 . 70)	4,58	4,64
E (60 . 70 . 70)	3,90	3,99
E (65 . 65 . 75)	3,60	3,66
E (65 . 75 . 75)	3,12	3,20
E (70 . 70 . 80)	2,89	2,99
E (70 . 80 . 80)	2,52	2,72
E (75 . 75 . 85)	2,36	2,47
E (75 . 85 . 85)	2,05	2,15
E (80 . 80 . 90)	1,89	1,89
E (80 . 90 . 90)	1,69	1,67

Die wahren Werthe sind so angeführt, wie sie nach Teteus Angabe von *Drateln* berechnet sind, die Näherungswerthe sind auf die im vorhergehenden §. angegebene Weise, jedoch *ohne Correction*, berechnet. Man sieht hieraus, dafs diese Nä-

herungswerthe den wahren Werthen zuweilen sehr nahe kommen, besonders bey den angeführten mittlern Altern. Wollte man aber dabey eine Correction anbringen, so würde man in vielen Fällen sich mehr von dem wahren Werthe entfernen. So ist z. B. der Näherungswerth der Verbindungsdauer von E(40,50,50) = 9,17. Die Correction nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens berechnet wäre 0,25; zöge man nun diese ab, so erhielte man 8,94, welches von dem wahren Werthe, oder 9,11, weiter entfernt ist, als der nicht corrigirte Ausdruck. Dagegen wird die Correction für den Näherungswerth von E (70 . 80 . 80), oder 2,72, gleich 0,07, durch deren Subtraction man dem wahren Werthe oder 2,52 nicht viel näher kömmt. Es ist daher am rathsamsten, wenn man doch einmal diese Näherungsmethode bey den erfahrungsmäfsigen Sterblichkeitstafeln anwenden will, sie ohne weitere Correction, die oft eine Corruption wird, zu gebrauchen. Wo aber nicht blofs einzelne Werthe gesucht werden, sondern ein ganzes System zusammenhängender Verbindungsdauern berechnet werden soll, da dürfte man wohl die mühsamere Arbeit der genauen Berechnung nach §. 207 und 208 nicht scheuen.

Anm. 2. Tetens empfiehlt in seiner Anleitung etc. diese Näherungsmethode mehr als ich es wagen möchte. Er giebt auch eine Methode an, die vorhin gefundene Correction der nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens gefundenen Näherungswerthe auf die Berechnung nach andern Mortalitätslisten anzuwenden, welche Methode darin besteht, dafs die gefundene Correction des hypothetischen Werthes, wenn m das hypothetische, und $\mathfrak{m}$ das erfahrungsmäfsige Verbindungs-Alter bedeutet, [nämlich das Alter, defsen mittlere Dauer = E(bc) ist] mit $\frac{\mathfrak{m}}{m}$ multiplicirt wird. Wenn indefsen gleich Tetens selbst sagt, dafs die Abweichung der nach der Süfsmilchschen Sterblichkeitsliste berechneten Näherungswerthe von den wahren Werthen nicht so grofs gefunden werde als bey den hypothetischen Näherungswerthen, so scheint er doch

nicht bemerkt zu haben, dafs diese Abweichung zuweilen so unbedeutend wird, wie die angeführten Beispiele ergeben. Auch ist gerade in dem Beispiel, worin er die Anwendung seiner Correctionsmethode zeigen will (Seite 277 a. a. O), ein Irrthum vorgegangen. Er giebt nämlich nach Süfsmilchs Tafel E (50 . 50) zu 10,01, und die dazu gehörige Dauer des einzelnen Lebens zu 64,68 an. Erstere ist aber = 10,97, und letztere = 62,52 [10,01 ist nach Süfsmilchs Tafel = E (50 . 55)]. Hiernach wird E (40 . 62,52) nicht = 9,33, wie Tetens angiebt, sondern = 9,17, und wenn man hievon die a. a. O. berechnete Correction mit 0,23 abziehen wollte, so erhielte man 8,94. Der wahre Werth für E (40 . 50 . 50) ist = 9,11, und man würde hier durch die Correction sich mehr von dem wahren Werthe entfernen als sich demselben nähern.

Drittes Kapitel.

Von

der Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens unter mehreren Personen.

§. 211.

Wenn mehr als zwey Personen in eine Verbindung zusammengetreten sind, so kömmt nicht blofs das Ueberleben der einzelnen Personen, sondern auch das Ueberleben der bestehenden Vereine niederer Grade über die bereits aufgelösete

Verbindung eines höhern Grades, oder die Fortdauer der noch bestehenden Verbindung nach dem Tode der übrigen Theilnehmer, in Betracht. Sind z. B. die Personen in Conternationen zusammen getreten, so kann gefragt werden, welche Anzahl von Paaren nach einer gewifsen Zeit aus den Conternationen noch existirt, dann auch, welche Anzahl einzelner Personen nach einer gewifsen Zeit noch lebt, oder auch wie lange ein Paar nach dem Tode des verstorbenen einen Mitgliedes, und wie lange ein einzelner Intereſsent nach dem Tode seiner beiden Mitgenoſsen noch lebt.

Hiebey ist im Allgemeinen zu bemerken, daſs, wenn anfänglich eine Verbindung von m Personen existirt und nach dem Ueberleben von m — u verbundenen Intereſsenten gefragt wird, dieses Ueberleben erst dann anfängt, wenn alle andre u Personen, also wenn die letzte derselben, ausgestorben ist, und aufhört, sobald noch eine der m — u Personen stirbt.

§. 212.

Wenn nun nach der Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens eines Vereins von bestimmten Personen über die andern gefragt wird, so kömmt es lediglich darauf, ob zu der Zeit, da die letzte der zu überlebenden Personen abgeht, die überlebenden Personen zusammen noch existiren oder existirt haben, und auf die Anzahl der Fälle, wo diese Ord-

nung im Sterben Statt findet. Es giebt daher zweierley Wege das Ueberleben zu bestimmen, indem man *entweder* suchen kann, welche überlebende Vereine existiren zu der Zeit, da die zu überlebenden Personen aussterben, also da die letzte derselben abgeht, *oder* auch, welche der überlebenden Vereine aufhören, d. h. getrennt werden, nachdem die übrigen Personen bereits ausgestorben sind. Beide Rechnungen geben begreiflich, wenn sie auf die ganze Verbindungszeit der überlebenden Personen, d. h. bis zur kleinsten Altersergänzung unter denselben, fortgesetzt werden, daſselbe Resultat, und in soweit von dem Ueberleben auf die ganze Verbindungszeit die Rede ist, werden diese beiden Berechnungen weiterhin ohne Unterschied gebraucht werden. Wenn sie aber auf eine kürzere Zeit angestellt werden, d. h. wenn gefragt wird, wie groſs die Wahrscheinlichkeit ist, daſs innerhalb einer bestimmten Zeit, kleiner als die Verbindungsdauer der überlebenden Personen, entweder der überlebende Verein bestanden habe zu der Zeit da die übrigen Personen aufstarben, oder daſs der überlebende Verein aufhöre, nachdem die übrigen Personen verstorben waren, so können die Resultate beider Rechnungen nicht gleich seyn, indem ein Theil derer Vereine, welche bey dem Aufsterben der zu überlebenden Personen noch bestanden, so lange die kleinste Altersergänzung nicht abgelaufen ist, fortwährt, folglich mehr Vereine die übrigen Personen überlebt

haben als nach dem Abgange derselben getrennt worden sind. (Vergl. §. 135).

§. 213.

Wenn also gefragt wird, wie wahrscheinlich es ist, dafs bey einer anfänglichen Verbindung von m Personen $m - u$ *bestimmte Interefsenten die übrigen u überleben*, nämlich so dafs die $m - u$ Personen zusammen noch leben, nachdem die übrigen u alle gestorben sind, und anfänglich auf ganze Jahre gerechnet wird, so kömmt es darauf an, wie viel Vereine der bestimmten $m - u$ Personen *am Ende jedes Jahrs* existiren, wovon die zugehörigen u *im Laufe des Jahrs* ausgestorben sind. Nimmt man an, dafs die Personen, woraus ursprünglich der Verein bestand, derzeit vom Alter a, b, c, d, f, g, h, imgleichen dafs die dazu gehörigen Zahlen der Lebenden A, B, C, D, F, G, H und die anfängliche Zahl der Vereine $= A\,B\,C\,D\,F\,G\,H$ gewesen, so ist die Zahl der Vereine, von denen am Ende des nten Jahrs A, B, C und D noch leben, F, G und H aber im Laufe des Jahrs ausgestorben sind,

$$= A^{n}_{-}B^{n}_{-}C^{n}_{-}D^{n}_{-}[(F-F^{n}_{-})(G-G^{n}_{-})(H-H^{n}_{-})$$

$$-(F-F^{n-1}_{--})(G-G^{n-1}_{--})(H-H^{n-1}_{--})] =$$

$$-A^{n}_{-}..D^{n}_{-}F\,G\,H + \left\{\begin{array}{l} A^{n}_{-}..D^{n}_{-}F^{n-1}_{--}G\,H \\ A^{n}_{-}..D^{n}_{-}G^{n-1}_{--}F\,H \\ A^{n}_{-}..D^{n}_{-}H^{n-1}_{--}F\,G \end{array}\right\}$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, F^{n-1}_{--}\, G^{n-1}_{--}\, H \\ A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, F^{n-1}_{--}\, H^{n-1}_{--}\, G \\ A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, G^{n-1}_{--}\, H^{n-1}_{--}\, F \end{array} \right\} +$$

$$A^{n}_{-}..D^{n}_{-}F^{n-1}_{--}G^{n-1}_{--}H^{n-1}_{--} + A^{n}_{-}..D^{n}_{-}FGH -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, F^{n}_{-}\, G\, H \\ A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, G^{n}_{-}\, F\, H \\ A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, H^{n}_{-}\, F\, G \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-} F^{n}_{-} G^{n}_{-} H \\ A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-} F^{n}_{-} H^{n}_{-} G \\ A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-} G^{n}_{-} H^{n}_{-} F \end{array} \right\}$$

$$- A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, F^{n}_{-}\, G^{n}_{-}\, H^{n}_{-}.$$

Wenn man diese Werthe für alle Jahre bis zum Ablauf der kleinsten Altersergänzung unter den überlebenden Personen zusammen nimmt, und mit A B C D F G H dividirt, so hat man die gesammte

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\int (A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, F^{n-1}_{--})}{A \,..\, D\, F} \\ \dfrac{\int (A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, G^{n-1}_{--})}{A \,..\, D\, G} \\ \dfrac{\int (A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, H^{n-1}_{--})}{A \,..\, D\, H} \end{array} \right\}$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\int (A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, F^{n-1}_{--}\, G^{n-1}_{--})}{A \,..\, D\, F\, G} \\ \dfrac{\int (A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, F^{n-1}_{--}\, H^{n-1}_{--})}{A \,..\, D\, F\, H} \\ \dfrac{\int (A^{n}_{-} \,..\, D^{n}_{-}\, G^{n-1}_{--}\, H^{n-1}_{--})}{A \,..\, D\, G\, H} \end{array} \right\} +$$

$$\frac{\int (A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}\, F^{\overline{n-1}}\, G^{\overline{n-1}}\, H^{\overline{n-1}})}{A \,..\, D\, F\, G\, H}$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\int (A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}\, F^{\overline{n}})}{A \,..\, D\, F} \\ \dfrac{\int (A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}\, G^{\overline{n}})}{A \,..\, D\, G} \\ \dfrac{\int (A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}\, H^{\overline{n}})}{A \,..\, D\, H} \end{array} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\int (A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}\, F^{\overline{n}}\, G^{\overline{n}})}{A \,..\, D\, F\, G} \\ \dfrac{\int (A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}\, F^{\overline{n}}\, H^{\overline{n}})}{A \,..\, D\, F\, H} \\ \dfrac{\int (A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}\, G^{\overline{n}}\, H^{\overline{n}})}{A \,..\, D\, G\, H} \end{array} \right\} -$$

$$\frac{\int (A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}\, F^{\overline{n}}\, G^{\overline{n}}\, H^{\overline{n}})}{A \,..\, D\, F\, G\, H}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{F^{\overline{-1}}}{F}\, E\, \overline{a\, b\, c\, d\, (f-1)} \\ \dfrac{G^{\overline{-1}}}{G}\, E\, \overline{a\, b\, c\, d\, (g-1)} \\ \dfrac{H^{\overline{-1}}}{H}\, E\, \overline{a\, b\, c\, d\, (h-1)} \end{array} \right\} -$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{F^{-1}\ G^{-1}}{F\ G}\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ (f-1)\ (g-1)} \\ \frac{F^{-1}\ H^{-1}}{F\ H}\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ (f-1)\ (h-1)} \\ \frac{G^{-1}\ H^{-1}}{G\ H}\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ (g-1)\ (h-1)} \end{array}\right\} +$$

$$\frac{F^{-1}\ G^{-1}\ H^{-1}}{F\ G\ H}\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ (f-1)\ (g-1)\ (h-1)}$$

$$-\left\{\begin{array}{l} E\ \overline{a\ b\ c\ d\ f} \\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ g} \\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ h} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} E\ \overline{a\ b\ c\ d\ f\ g} \\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ f\ h} \\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ g\ h} \end{array}\right\}$$

$$-\ E\ \overline{a\ b\ c\ d\ f\ g\ h}.$$

Das Gesetz, wonach die Reihe, auch für mehrere Personen, fortgeht, ist leicht zu übersehen. Wenn nämlich die zusammen eingeklammerten Theile als ein Glied betrachtet werden, so ist das erste Glied der obern Reihe die Summe der Dauer aller Verbindungen unter den überlebenden Personen zusammengenommen mit je einer der zu überlebenden Personen, das Alter der letztern um 1 Jahr zurück gerechnet, wobey jede Verbindungsdauer mit der zu dem Anfangsjahr gehörigen Zahl der Lebenden für diese Person dividirt und mit der zu dem um 1 frühern Jahr gehörigen Anfangszahl multiplicirt ist. Das 2te Glied dieser Reihe ist die Summe der mittleren Dauer aller Verbindungen

zwischen den überlebenden Personen zusammengenommen mit je zwey der zu überlebenden Personen, das Alter der letztern um 1 Jahr zurückgerechnet, wobey wieder jede Verbindungsdauer mit dem Producte der zu dem Anfangsjahre gehörigen Zahlen der Lebenden für die letztern Personen dividirt, mit dem Producte der zu dem um 1 frühern Jahr gehörigen Zahlen der Lebenden aber multiplicirt ist. Das dritte Glied ist die mittlere Dauer der Verbindung aller überlebenden Personen zusammengenommen mit den drey zu überlebenden Personen zusammen, das Alter der letztern wieder um 1 Jahr zurückgerechnet, wobey die Verbindungsdauer gleichfalls mit dem Producte der Lebenszahlen der zu überlebenden Personen für das Anfangsjahr dividirt, und mit dem Producte der zu dem nächstvorhergehenden Lebensjahre gehörigen Zahlen multiplicirt ist. In der untern Reihe ist das erste Glied die Summe der mittlern Dauer der Verbindungen der überlebenden Personen zusammengenommen mit je einer der zu überlebenden, das zweite Glied die Summe der mittlern Dauer der Verbindungen aller überlebenden Personen zusammengenommen mit je zwey der zu überlebenden, so wie das dritte Glied die mittlere Dauer der Verbindung aller überlebenden Personen zusammengenommen mit den drey zu überlebenden Personen.

Wenn man die überlebenden Personen *zusammen* mit N, die Dauer ihrer Verbindung mit *irgend*

einer der zu überlebenden Personen mit $E\overline{N.I}$, mit *irgend zwey* durch $E\overline{N.II}$, mit *irgend drey* durch $E\overline{N.III}$, und die Summen der zusammengehörigen Verbindungen von demselben Grade mit $S.E\overline{N.I}$, $S.E\overline{N.II}$, $S.E\overline{N.III}$ etc. bezeichnet, wenn man dabey durch die neben die Zahl der zu überlebenden Personen gesetzte Zahl — I andeutet, dafs ihr Alter um I Jahr zurückgenommen werden soll, z. B. $S.E.N.III^{-1}$, ferner durch $\frac{I^{-1}}{I}$, $\frac{II^{-1}}{II}$ etc., dafs jede Dauer mit der zu dem Anfangsjahr gehörigen Zahl der Lebenden dividirt und mit der zu dem nächstvorhergehenden Lebensjahre gehörigen Zahl multiplicirt werden soll, so kann man die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens der Verbindung N über x andre Personen ausdrucken durch

$$S\left(\frac{I^{-1}}{I}E\,N.I^{-1}\right) - S\left(\frac{II^{-1}}{II}\,E\,N.II^{-1}\right)$$

$$+S\left(\frac{III^{-1}}{III}\,E\,N.III^{-1}\right) - \ldots + \frac{X^{-1}}{X}EN.X^{-1}$$

$$- S(E\,\overline{N.I}) + S(E\,\overline{N.II}) - S(E\,\overline{N.III}) + \ldots \pm E\,\overline{N.X}.$$

Bey einer Verbindung von zwey Personen hat man also hienach die Wahrscheinlichkeit des Ue-

berlebens von A über B auf ganze Jahre, d. h. hier die Wahrscheinlichkeit, dafs A am Ende desselben Jahrs, worin B stirbt, lebe, =

$$\frac{B^{\overline{-1}}}{B} \; E\,\overline{a\,(b-1)} - E\,\overline{a\,b}$$ (Vergl. §. 132).

Bey einer Verbindung von drey Personen wäre die Wahrscheinlichkeit, dafs A und B in Verbindung C überleben, in dem Maafse nämlich wie vorher angegeben ist, $= \frac{C^{\overline{-1}}}{C} E\,\overline{a\,b\,(c-1)}$ $- E\,\overline{a\,b\,c}$, die Wahrscheinlichkeit aber, dafs A die beiden andern B und C überlebe, nämlich am Ende des Jahrs noch lebe, worin die letzte der beiden andern Personen verstorben ist, =

$$\frac{B^{\overline{-1}}}{B} E\,\overline{a\,(b-1)} + \frac{C^{\overline{-1}}}{C} E\,\overline{a(c-1)}$$

$$- \frac{B^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{B\,C} E\,\overline{a\,(b-1)\,(c-1)} -$$

$$E\,\overline{a\,b} - E\,\overline{a\,c} + E\,\overline{a\,b\,c}$$ etc.

Anm. Tetens setzt in seinem oft angezogenen Werke Seite 410 die letzte Wahrscheinlichkeit =

$$\int \frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{A} \cdot \frac{(B - B^{\overline{x}})\,(C - C^{\overline{x}})}{B\,C},$$

welches ist $= \frac{\int \Delta A^{\overline{x-1}}}{A} (1 - \frac{B^{\overline{x}}}{B} - \frac{C^{\overline{x}}}{C}$

$$\dagger \frac{B^{x}\, C^{x}}{B\, C}) = \frac{\int \Delta A^{x-1}}{A} - \frac{\int(\Delta A^{x-1} B^{x})}{A\, B}$$

$$- \frac{\int(\Delta A^{x-1} C^{x})}{A\, C} \dagger \frac{\int(\Delta A^{x-1} B^{x} C^{x})}{A\, B\, C}$$

$$= 1 - \frac{A^{-1}}{A} E\,(a-1)\,b - \frac{A^{-1}}{A} E\,(a-1)\,c$$

$$\dagger \frac{A^{-1}}{A} E\,(a-1)\,b\,c \dagger E\,a\,b \dagger E\,a\,c - E\,a\,b\,c.$$

Dies ist eigentlich die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des Jahrs, worin A stirbt, auch B und C verstorben sind, oder auch nach dem letztern Ausdrucke es ist $= 1$, weniger der Wahrscheinlichkeit, dafs B sowohl als C die Person A überleben, wieder weniger der Wahrscheinlichkeit, dafs beide zusammen überleben A; folglich ist dieser Werth, genau genommen, zu grofs. Wollte man hier das gesuchte Ueberleben, so wie es sonst auf ganze Jahre angegeben wird, nämlich so, dafs diejenigen zu überlebenden Personen, welche mit dem Ueberlebenden in dem nämlichen Jahre sterben, nicht mitgerechnet werden, bestimmen, so wäre es $=$

$$\frac{\int \Delta A^{x-1}}{A} \frac{(B - B^{x-1})\,(C - C^{x-1})}{B\, C}.$$

Dies ist aber $= \frac{\int \Delta A^{x-1}}{A}(1 - \frac{B^{x-1}}{B} -$

$$\frac{C^{x-1}}{C} \dagger \frac{B^{x-1}\, C^{x-1}}{B\, C}) = 1 - \frac{f(A^{x-1} B^{x-1})}{A\, B}$$

$$- \frac{\int(A^{x-1} C^{x-1})}{A\, C} \dagger \frac{\int(A^{x-1} B^{x-1} C^{x-1})}{A\, B\, C}$$

$$+\frac{\int(A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x-1}})}{A\;B}+\frac{\int(A^{\overline{x}}\,C^{\overline{x-1}})}{A\;C}-\frac{\int(A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}})}{A\;B\;C}=1-1-E\,\overline{ab}-1-E\,\overline{ac}+1+E\,\overline{abc}+\frac{B^{\overline{-1}}}{B}E\,\overline{a(b-1)}+\frac{C^{\overline{-1}}}{C}E\,\overline{a(c-1)}-\frac{B^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{B\;C}E\,\overline{a(b-1)(c-1)}=\frac{B^{\overline{-1}}}{B}E\,\overline{a(b-1)}+\frac{C^{\overline{-1}}}{C}E\,\overline{a(c-1)}-\frac{B^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{B\;C}E\,\overline{a(b-1)(c-1)}-E\,\overline{ab}-E\,\overline{ac}$$

$+E\,\overline{abc}$, wie oben. (Vergl. §. 132, Anm.).

§. 214.

Wenn aber die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens *auf augenblickliche Theile des Jahrs* berechnet werden soll, und wenn zuerst nur eine einzige Person F zu überleben ist, die überlebenden Vereine aber aus den Personen A B C bestehen, auch x die verflossene Zeit des Jahrs bedeutet, so ist der Abgang der F für jedes Element des nten Jahrs $=\Delta F^{\overline{n-1}}\,dx$, und die Anzahl der überlebenden Vereine für das Jahr $=$

$$\int(A^{\overline{n-1}}-x\Delta A^{\overline{n-1}})(B^{\overline{n-1}}-x\Delta B^{\overline{n-1}})(C^{\overline{n-1}}-x\Delta C^{\overline{n-1}})\Delta F^{\overline{n-1}}dx.$$

Ohne Rücksicht auf $\triangle F^{\overline{n-1}}$, welcher Factor auf die Integration keinen Einfluſs hat, ist

$\int (A^{\overline{n-1}} - x \triangle A^{\overline{n-1}})\,(B^{\overline{n-1}} - x \triangle B^{\overline{n-1}})\,(C^{\overline{n-1}} - x \triangle C^{\overline{n-1}})\,dx$

die vollständige Anzahl der Vereine aus A B C, welche während des nten Jahrs bestehn. Nennt man also diese Anzahl $Z^{\overline{n}}$ und die ursprüngliche Anzahl dieser Vereine Z, so hat man die Zahl der überlebenden Vereine für das nte Jahr $=$

$Z^{\overline{n}} . \triangle F^{\overline{n-1}} = Z^{\overline{n}} F^{\overline{n-1}} - Z^{\overline{n}} F^{\overline{n}}$, so wie die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens für das nämliche Jahr $= \frac{Z^{\overline{n}} F^{\overline{n-1}}}{Z F} - \frac{Z^{\overline{n}} F^{\overline{n}}}{Z F}$, die Wahrscheinlichkeit für alle Jahre aber $=$

$\frac{\int (Z^{\overline{n}} F^{\overline{n-1}})}{Z F} - \frac{\int (Z^{\overline{n}} F^{\overline{n}})}{Z F}$. Ge-

braucht man nun wieder die im §. 209 b. angegebenen Bezeichnungen und machen die überlebenden Personen unter sich eine Verbindung nach m aus, so kann man allgemein die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens ausdrucken durch

$$\frac{F^{\overline{-1}}}{(m \dagger 1)\,F} - \left[\frac{M^{\overline{-1}}}{M}\; E\, M^{\overline{-1}} . (f-1) + \right.$$

$$\frac{1}{m}\, S . \frac{(M-1)^{\overline{-1}}}{M-1}\; E\,(M-1)^{\overline{-1}} . I\,(f-1)$$

$$+\frac{1\cdot 2}{m\cdot m-1}\,S\cdot\frac{(M-II)^{-1}}{M-II}\,E\overline{(M-II)^{-1}\cdot II\cdot(f-1)}$$

$$+\,..]-\frac{1}{m+1}\,[\frac{M^{-1}}{M}\,E\overline{M^{-1}\cdot f}+$$

$$\frac{1}{m}\,S\frac{(M-I)^{-1}}{M-I}\,E\overline{(M-I)^{-1}\cdot I\cdot f}$$

$$+\frac{1\cdot 2}{m\cdot m-1}\,S\frac{(M-II)^{-1}}{M-II}\,E\overline{(M-II)^{-1}\cdot II\cdot f}$$

$$+\,..).$$

Wenn also z. B. der überlebenden Personen zwey, nämlich A und B, sind, und F die zu überlebende Person, so ist die Wahrscheinlichkeit des

$$\text{Ueberlebens}=\frac{F^{-1}}{3F}\,[\frac{A^{-1}B^{-1}}{AB}\,E\overline{(a-1)\,(b-1)\,(f-1)}$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{A^{-1}}{A}\,E\overline{(a-1)\,b\,(f-1)}+$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{B^{-1}}{B}\,E\overline{a\,(b-1)\,(f-1)}+$$

$$\frac{1\cdot 2}{2\cdot 1}\,E\overline{a\,b\,(f-1)}\,]-$$

$$\tfrac{1}{3}\,[\frac{A^{-1}B^{-1}}{AB}\,E\overline{(a-1)\,(b-1)\,f}+$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{A^{-1}}{A}\,E\overline{(a-1)\,b\,f}+$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{B^{-1}}{B}\,E\,\overline{a\,(b-1)\,f} + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 1}\,E\,\overline{a\,b\,f}] =$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{A^{-1}B^{-1}F^{-1}}{A\,B\,F}\,E\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,(f-1)}$$

$$+\,\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{-1}F^{-1}}{A\;F}\,E\,\overline{(a-1)\,b\,(f-1)} +$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{B^{-1}F^{-1}}{B\;F}\,E\,\overline{a\,(b-1)\,(f-1)} +$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{F^{-1}}{F}\,E\,\overline{a\,b\,(f-1)} -$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{A^{-1}\;B^{-1}}{A\;B}\,E\,\overline{(a-1)\,(b-1)}\,f\; -$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{-1}}{A}\,E\,\overline{(a-1)\,b\,f} -$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{B^{-1}}{B}\,E\,\overline{a\,(b-1)\,f} - \tfrac{1}{3}\,E\,\overline{a\,b\,f},$$ und da

$$\frac{A^{-1}\;B^{-1}\;F^{-1}}{A\;B\;F}\,E\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,(f-1)}$$

$$-\,E\,\overline{a\,b\,f} = \frac{\int(A'^{0}\,B'^{0}\,F'^{0}) - \int(A'^{1}\,B'^{1}\,F'^{1})}{A\;B\;F}$$

$$= \frac{A\,B\,F}{A\,B\,F} = 1$$ ist, so hat man den angegebenen Werth auch $= \tfrac{1}{3} +$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{-1}\;F^{-1}}{A\;F}\,E\,\overline{(a-1)\,b\,(f-1)} +$$

$$\frac{1}{6} - \frac{B^{-1} \; F^{-1}}{B \; F} \; E \; \overline{a\,(b-1)\;(f-1)} +$$

$$\frac{1}{3} \frac{F^{-1}}{F} \; E \; \overline{a\,b\;(f-1)} -$$

$$\frac{1}{3} \frac{A^{-1} \; B^{-1}}{A \; B} \; E \; \overline{(a-1)\;(b-1)\;f} -$$

$$\frac{1}{6} \frac{A^{-1}}{A} \; E \; \overline{(a-1)\,b\,f} -$$

$$\frac{1}{6} \frac{B^{-1}}{B} \; E \; \overline{a\,(b-1)\,f}.$$

[S. Tetens Einleitung, Seite 436 etc.].

§. 215.

Soll die vollständige Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs eine einzige Person A mehrere andre F, G, H überlebe, so kann man am bequemsten suchen, welche A in jedem Zeittheile sterben, die zu den schon ausgestorbenen Vereinen F, G, H gehören. Nun ist, wenn die Anzahl der nach Ablauf der Zeit x im nten Jahre ausgestorbenen Vereine unter F G H mit F G H dividirt wird, der Quotient

$$= 1 - \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{F^{\overline{n-1}} - x \triangle F^{\overline{n-1}}}{F} \\ \dfrac{G^{\overline{n-1}} - x \triangle G^{\overline{n-1}}}{G} \\ \dfrac{H^{\overline{n-1}} - x \triangle H^{\overline{n-1}}}{H} \end{array} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(F^{\overline{n-1}} - x \triangle F^{\overline{n-1}})(G^{\overline{n-1}} - x \triangle G^{\overline{n-1}})}{F\ G} \\ \dfrac{(F^{\overline{n-1}} - x \triangle F^{\overline{n-1}})(H^{\overline{n-1}} - x \triangle H^{\overline{n-1}})}{F\ H} \\ \dfrac{(G^{\overline{n-1}} - x \triangle G^{\overline{n-1}})(H^{\overline{n-1}} - x \triangle H^{\overline{n-1}})}{G\ H} \end{array} \right\}$$

$$- \frac{(F^{\overline{n-1}} - x \triangle F^{\overline{n-1}})(G^{\overline{n-1}} - x \triangle G^{\overline{n-1}})(H^{\overline{n-1}} - x \triangle H^{\overline{n-1}})}{F\ G\ H}$$

(§. 199), und man hat also die Wahrscheinlichkeit, dafs im xten Elemente des nten Jahrs A sterbe, nachdem alle andre Mitverbundene gestorben sind, =

$$\frac{\triangle A^{\overline{n-1}}}{A} dx - \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{F^{\overline{n-1}} - x \triangle F^{\overline{n-1}}}{F} \\ \dfrac{G^{\overline{n-1}} - x \triangle G^{\overline{n-1}}}{G} \\ \dfrac{H^{\overline{n-1}} - x \triangle H^{\overline{n-1}}}{H} \end{array} \right\} \frac{\triangle A^{\overline{n-1}}}{A} dx +$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(F^{n-1} - x\triangle F^{n-1})\ (G^{n-1} - x\triangle G^{n-1})}{F\quad G} \\ \dfrac{(F^{n-1} - x\triangle F^{n-1})\ (H^{n-1} - x\triangle H^{n-1})}{F\quad H} \\ \dfrac{(G^{n-1} - x\triangle G^{n-1})\ (H^{n-1} - x\triangle H^{n-1})}{G\quad H} \end{array}\right\} \frac{\triangle A^{n-1}}{A}\, dx -$$

$$\frac{(F^{n-1} - x\triangle F^{n-1})(G^{n-1} - x\triangle G^{n-1})(H^{n-1} - x\triangle H^{n-1})}{F\quad G\quad H}\ \frac{\triangle A^{n-1}}{A}\, dx.$$

Wenn man nun integrirt und demnächst $x = 1$ setzt, so druckt die Summe der Integrale die gesuchte vollständige Wahrscheinlichkeit für das nte Jahr aus. Nimmt man aber diese Werthe für alle Jahre zusammen, so kann man wieder einen jeden Theil, so wie im vorigen §. geschehen, durch mittlere Lebens- und Verbindungsdauern ausdrucken. Wenn indefsen die Anzahl der anfänglich verbundenen Personen $= m$ ist, so enthält der Ausdruck des vorigen §. lauter Verbindungsdauern nach m, der Ausdruck des gegenwärtigen §. dagegen einzelne Lebens- und Verbindungsdauern nach 2, 3 etc. bis nach m.

Sollte also z. B. auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs eine Person A zwey andre F und G überlebe, so erhielte man dieselbe $= \dfrac{A^{-1}}{A}\ E\,\overline{(a-1)} -$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{A^{-1}\,F^{-1}}{A\,F}\;E\,\overline{(a-1)\,(f-1)}\;-$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{A^{-1}\,G^{-1}}{A\,G}\;E\,\overline{(a-1)\,(g-1)}\;-$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{A^{-1}}{A}\;E\,\overline{(a-1)\,f}\;-$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{A^{-1}}{A}\;E\,\overline{(a-1)\,g}\;+$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{A^{-1}\,F^{-1}\,G^{-1}}{A\,F\,G}\;E\,\overline{(a-1)\,(f-1)\,(g-1)}+$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{-1}\,F^{-1}}{A\,F}\;E\,\overline{(a-1)\,(f-1)\,g}\;+$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{-1}\,G^{-1}}{A\,G}\;E\,\overline{(a-1)\,f\,(g-1)}+$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{A^{-1}}{A}\;E\,\overline{(a-1)\,f\,g}\;-\;E\,a\;+$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{F^{-1}}{F}\;E\,\overline{a\,(f-1)}\;+$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{G^{-1}}{G}\;E\,\overline{a\,(g-1)}\;+\;\tfrac{1}{2}\,E\,\overline{a\,f}\;+\;\tfrac{1}{2}\,E\,\overline{a\,g}\;-$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{F^{-1}\,G^{-1}}{F\,G}\;E\,\overline{a\,(f-1)\,(g-1)}\;-$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{F^{-1}}{F}\;E\,\overline{a\,(f-1)\,g}\;-$$

$\frac{1}{6}\frac{G^{-1}}{G} E\overline{af(g-1)} - \frac{1}{3} E\overline{afg}$. Und da

$\frac{A^{-1}}{A} E\overline{(a-1)} - Ea = 1$,

$\frac{A^{-1}\ F^{-1}}{A\ F} E\overline{(a-1)(f-1)} - E\overline{af} = 1$, so

wie $\frac{A^{-1}\ G^{-1}}{A\ G} E\overline{(a-1)(g-1)} - E\overline{ag} = 1$,

imgleichen $\frac{A^{-1}\ F^{-1}\ G^{-1}}{A\ F\ G} E\overline{(a-1)(f-1)(g-1)}$

$- E\overline{afg} = 1$, so hat man die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch $= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{A^{-1}}{A}[E\overline{(a-1)f} +$

$E\overline{(a-1)g}] + \frac{1}{6}\frac{A^{-1}}{A}[\frac{F^{-1}}{F} E\overline{(a-1)(f-1)g}$

$+ \frac{G^{-1}}{G} - E\overline{(a-1)f(g-1)}] +$

$\frac{1}{3}\frac{A^{-1}}{A} E\overline{(a-1)fg} +$

$\frac{1}{2}\frac{F^{-1}}{F} E\overline{a(f-1)} + \frac{1}{2}\frac{G^{-1}}{G} E\overline{a(g-1)} -$

$\frac{1}{6}\frac{F^{-1}}{F} E\overline{a(f-1)g} -$

$$\frac{1}{6}\,\frac{G^{-1}}{G}\,E\,\overline{a\,f\,(g-1)}\;-$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{F^{-1}\;G^{-1}}{F\;G}\,E\,\overline{a\,(f-1)\,(g-1)}.$$

§. 216.

Wenn sowohl von den überlebenden, als von den zu überlebenden Personen mehrere sind, und wieder die vollständige Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens gesucht wird, so kann man von den überlebenden Personen diejenigen Vereine nehmen, die in einem bestimmten Zeittheile aufgelöset werden, von den zu überlebenden Personen aber wieder diejenigen Vereine, die bis zu dem gegebenen Zeittheile ganz ausgestorben sind. Wenn nun das Jahr aus m Theilen besteht und die überlebenden Personen A, B, C sind, so ist die Anzahl derer Vereine, die im qten Theil des nten Jahrs aufgelöset werden, =

$$(A^{n-1} - \tfrac{q-1}{m}\Delta A^{n-1})(B^{n-1} - \tfrac{q-1}{m}\Delta B^{n-1})(C^{n-1} - \tfrac{q-1}{m}\Delta C^{n-1})$$

$$-(A^{n-1} - \tfrac{q}{m}\Delta A^{n-1})(B^{n-1} - \tfrac{q}{m}\Delta B^{n-1})(C^{n-1} - \tfrac{q}{m}\Delta C^{n-1})$$

$$= -\left\{\begin{matrix} A^{n-1}\;B^{n-1}\;\Delta C^{n-1} \\ A^{n-1}\;C^{n-1}\;\Delta B^{n-1} \\ B^{n-1}\;C^{n-1}\;\Delta A^{n-1} \end{matrix}\right\} \frac{q-1-q}{m} +$$

$$\left\{\begin{matrix} A^{\overline{n-1}} & \Delta\, B^{\overline{n-1}} & \Delta\, C^{\overline{n-1}} \\ B^{\overline{n-1}} & \Delta\, A^{\overline{n-1}} & \Delta\, C^{\overline{n-1}} \\ C^{\overline{n-1}} & \Delta\, A^{\overline{n-1}} & \Delta\, B^{\overline{n-1}} \end{matrix}\right\} \frac{(q-1)^2 - q^2}{m^2} -$$

$$\Delta\, A^{\overline{n-1}}\ \Delta\, B^{\overline{n-1}}\ \Delta\, C^{\overline{n-1}}\ \frac{(q-1)^3 - q^3}{m^3}$$

oder auch, wenn man die Summen der gleichnamigen Producte aus den Zahlen der Lebenden in die Decremente der Reihe nach mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ bezeichnet und die Potenzen von $q - 1$ von den gleichnamigen Potenzen von q abzieht $=$

$$\mathfrak{P}\,\frac{1}{m} - \mathfrak{Q}\,\frac{2q-1}{m^2} + \mathfrak{R}\,\frac{3q^2 - 3q + 1}{m^3}.$$

Setzt man aber $m = \infty$, und $\frac{q}{m} = x$, so ist

$$\frac{2q-1}{m^2} = 2\,x\,dx,\quad \frac{3q^2 - 3q + 1}{m^3} =$$

$3\,x^2\,dx$, und man hat dann die Zahl der in einem Zeitelemente aufgelöseten Vereine $= \mathfrak{P}\,dx - 2\,\mathfrak{Q}\,x\,dx + 3\,\mathfrak{R}\,x^2\,dx$.

Sind ferner F, G, H diejenigen Personen, welche überlebt werden sollen, so hat man nach dem vorhergehenden §. den Quotienten für die mit FGH dividirte Anzahl der am Ende der Zeit x im nten Jahr ausgestorbenen Vereine aus F, G, H

$$= 1 - \left\{ \frac{F^{\overline{n-1}} - x \Delta F^{\overline{n-1}}}{F} \right\} - \left\{ \frac{G^{\overline{n-1}} - x \Delta G^{\overline{n-1}}}{G} \right\} - \left\{ \frac{H^{\overline{n-1}} - x \Delta H^{\overline{n-1}}}{H} \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{(F^{\overline{n-1}} - x \Delta F^{\overline{n-1}})\,(G^{\overline{n-1}} - x \Delta G^{\overline{n-1}})}{F\ G} \right\} + \left\{ \frac{(F^{\overline{n-1}} - x \Delta F^{\overline{n-1}})\,(H^{\overline{n-1}} - x \Delta H^{\overline{n-1}})}{F\ H} \right\} + \left\{ \frac{(G^{\overline{n-1}} - x \Delta G^{\overline{n-1}})\,(H^{\overline{n-1}} - x \Delta H^{\overline{n-1}})}{G\ H} \right\}$$

$$- \frac{(F^{\overline{n-1}} - x \Delta F^{\overline{n-1}})\,(G^{\overline{n-1}} - x \Delta G^{\overline{n-1}})\,(H^{\overline{n-1}} - x \Delta H^{\overline{n-1}})}{F\ G\ H}.$$

Wenn man also diesen Ausdruck mit

$$\frac{\mathfrak{P}\,dx - 2\mathfrak{Q}\,x\,dx + 3\mathfrak{R}x^2\,dx}{A\ B\ C}$$

multiplicirt, darauf jeden Theil integrirt und dann $x = 1$ setzt, so erhält man die gesuchte vollständige Wahrscheinlichkeit für das nte Jahr, und durch Zusammenlegung der Werthe für alle Jahre die vollständige Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A B C über F G H. Es ergiebt sich indefsen, dafs eine allgemeine Entwickelung des angegebenen Aus-

drucks, zumal wenn Alles auf Verbindungsdauern zurückgebracht werden sollte, sehr umständlich seyn würde.

Anm. Wollte man in diesen beiden letzten §. §. suchen, welche überlebende Vereine zu der Zeit bestehen, da die zu überlebenden Personen aufsterben, so würde die Rechnung noch weitläufiger ausfallen. Wenn aber bestimmt werden soll, wie wahrscheinlich es ist, dafs *bis zu einer bestimmten Zeit*, kleiner als die kleinste Altersergänzung unter den überlebenden Personen, einige Theilnehmer eines Vereins nach dem Tode der übrigen zusammenleben, so mufs die Rechnung auf die zuletzt erwähnte Art angestellt werden, und man würde dabey folgendermaafsen verfahren können. Wenn man der Kürze wegen die im Anfange des nten Jahrs *verstorbenen* F mit M, die *verstorbenen* G mit N und die *verstorbenen* H mit R, so wie die Decremente der Lebenden oder Incremente der Sterbenden für dafselbe Jahr mit μ, ν und ϱ bezeichnet, auch annimmt, dafs das Jahr aus m gleichen Theilen bestehe, so ist im Anfange des qten Zeittheils die Anzahl der ausgestorbenen Conternationen $= (M + \frac{q-1}{m}\mu)\ (N + \frac{q-1}{m}\nu)\ (R + \frac{q-1}{m}\varrho)$, am Ende des qten Zeittheils aber $= (M + \frac{q}{m}\mu)\ (N + \frac{q}{m}\nu)\ (R + \frac{q}{m}\varrho)$. Der Unterschied beider Ausdrücke, oder die Anzahl der in diesem Zeittheile aufsterbenden Conternationen, ist

$$= \left\{\begin{matrix} M\,N\,\varrho \\ M\,R\,\nu \\ N\,R\,\mu \end{matrix}\right\} \frac{1}{m} + \left\{\begin{matrix} M\,\nu\,\varrho \\ N\,\mu\,\varrho \\ R\,\mu\,\nu \end{matrix}\right\} \frac{2q-1}{m^2}$$

$$+ \mu\nu\varrho \frac{3q^2 - 3q + 1}{m^3} \text{ oder, wenn man } m = \infty$$

nimmt und den abgelaufenen Theil des Jahrs mit x bezeichnet,

$$= \left\{ \begin{matrix} MN\varrho \\ MR\nu \\ NR\mu \end{matrix} \right\} dx + \left\{ \begin{matrix} M\nu\varrho \\ N\mu\varrho \\ R\mu\nu \end{matrix} \right\} 2x\,dx +$$

$\mu\nu\varrho\, 3x^2\, dx$. Setzt man aber, anstatt M, N und R, die gewöhnlichen Ausdrücke für die Zahl der Gestorbenen, imgleichen für μ, ν, ϱ die Decremente, und dividirt mit F G H, so hat man den Quotienten =

$$\left\{ \begin{matrix} \left(1 - \frac{F^{n-1}}{F} - \frac{G^{n-1}}{G} + \frac{F^{n-1}G^{n-1}}{FG}\right) \frac{\Delta H^{n-1}}{H} \\ \left(1 - \frac{F^{n-1}}{F} - \frac{H^{n-1}}{H} + \frac{F^{n-1}H^{n-1}}{FH}\right) \frac{\Delta G^{n-1}}{G} \\ \left(1 - \frac{G^{n-1}}{G} - \frac{H^{n-1}}{H} + \frac{G^{n-1}H^{n-1}}{GH}\right) \frac{\Delta F^{n-1}}{F} \end{matrix} \right\} dx +$$

$$\left\{ \begin{matrix} \left(1 - \frac{F^{n-1}}{F}\right) \frac{\Delta G^{n-1}\,\Delta H^{n-1}}{G\,H} \\ \left(1 - \frac{G^{n-1}}{G}\right) \frac{\Delta F^{n-1}\,\Delta H^{n-1}}{F\,H} \\ \left(1 - \frac{H^{n-1}}{H}\right) \frac{\Delta F^{n-1}\,\Delta G^{n-1}}{F\,G} \end{matrix} \right\} 2x\,dx$$

$$+ \frac{\Delta F^{n-1}\,\Delta G^{n-1}\,\Delta H^{n-1}}{F\,G\,H}\, 3x^2\, dx.$$

Wenn man ferner jeden Theil dieses Ausdrucks mit

$$\frac{A^{n-1} - x\Delta A^{n-1})\,(B^{n-1} - x\Delta B^{n-1})\,(C^{n-1} - x\Delta C^{n-1})}{A\,B\,C},$$

als der Anzahl der bestehenden Vereine aus A B C, multiplicirt, dann integrirt und $x = 1$ setzt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A B C für das nte Jahr allein und, durch Zusammenlegung dieser Wahrscheinlichkeiten bis zur Altersergänzung der ältsten Person unter den überlebenden, die gesammte Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens.

§. 217.

Aufser dem Ueberleben, so wie es bisher bestimmt worden, kann noch das *zwiefache Ueberleben* in Betracht kommen, wenn nämlich gefragt wird, wie wahrscheinlich es ist, dafs einige bestimmte Personen andre Personen überleben, nachdem diese vorher schon dritte Personen überlebt haben.

Wenn nun zuerst auf ganze Jahre gerechnet wird, und bestimmt werden soll, wie wahrscheinlich es ist, dafs von drey Personen A B C, C zuerst, dann B sterbe und A zu dieser Zeit noch lebe, so ist für irgend ein xtes Jahr die Anzahl der Vereine, wovon A am Ende des Jahrs lebt, B im Laufe des Jahrs stirbt und C schon vorher gestorben ist,

$$= A^{\overline{x}} \, \Delta B^{\overline{x-1}} \, (C - C^{\overline{x-1}}) =$$

$$A^{\overline{x}} (B^{\overline{x-1}} - B^{\overline{x}}) \, (C - C^{\overline{x-1}}) = A^{\overline{x}} \, B^{\overline{x-1}} \, C$$

$$- A^{\overline{x}} \, B^{\overline{x}} \, C - A^{\overline{x}} \, B^{\overline{x-1}} \, C^{\overline{x-1}} + A^{\overline{x}} \, B^{\overline{x}} \, C^{\overline{x-1}}.$$

Nimmt man diese Theile für alle Jahre zusammen und dividirt mit A B C, so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{\int (A^{\overline{x}} \, B^{\overline{x-1}})}{A \, B} -$

$$\frac{\int(A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}})}{A\;B} - \frac{\int(A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}})}{A\;B\;C} + \frac{\int(A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x-1}})}{A\;B\;C} = \frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,E^{\overline{a\,(b-1)}}$$

$$-E^{\overline{a\,b}} - \frac{B^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{B\;C}\,E^{\overline{a\,(b-1)\,(c-1)}}$$

$$+ \frac{C^{\overline{-1}}}{C}\,E^{\overline{a\,b\,(c-1)}}.$$

Wären sowohl von den zu überlebenden als von den im ersten und zweiten Grade überlebenden Personen mehrere vorhanden, so wäre, wenn A und B die Personen, welche zuletzt, F und G die Personen, welche in der mittlern Zeit und P, Q diejenigen Personen sind, die zuerst abgehen, der Werth irgend eines xten Jahrs $= \frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}}{A\;B}$ [

$$\frac{F^{\overline{x-1}}}{F} + \frac{G^{\overline{x-1}}}{G} - \frac{F^{\overline{x-1}}\,G^{\overline{x-1}}}{F\;G} - \frac{F^{\overline{x}}}{F} - \frac{G^{\overline{x}}}{G} + \frac{F^{\overline{x}}\,G^{\overline{x}}}{F\;G}] \times (1 - \frac{P^{\overline{x-1}}}{P} - \frac{Q^{\overline{x-1}}}{Q} + \frac{P^{\overline{x-1}}\,Q^{\overline{x-1}}}{P\;Q}),$$

wo der in der ersten Klammer befindliche Ausdruck diejenigen Paare aus F G anzeigt, welche im Laufe des xten Jahrs aufsterben, (§. 200) der Ausdruck in der zweiten Klammer aber diejenigen Paare aus P Q an-

giebt, die bis zum Anfange dieses Jahrs ausgestorben waren (§. 199). Hienach kann man den Werth sämtlicher Jahre bis zur Altersergänzung der ältsten Person unter A B für alle Fälle dieser Art finden.

Wenn also z. B. die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, dafs A die beiden Personen F und G überlebe, nachdem diese zuerst H überlebt haben, so ist der Werth für das xte Jahr =

$$\frac{A^{\overline{x}}}{A}\left(\frac{F^{\overline{x-1}}}{F}+\frac{G^{\overline{x-1}}}{G}-\frac{F^{\overline{x-1}}\,G^{\overline{x-1}}}{F\,G}-\frac{F^{\overline{x}}}{F}-\frac{G^{\overline{x}}}{G}+\frac{F^{\overline{x}}\,G^{\overline{x}}}{F\,G}\right)\left(1-\frac{H^{\overline{x-1}}}{H}\right).$$

Daraus erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{\int(A^{\overline{x}}\,F^{\overline{x-1}})}{A\,F}+\frac{\int(A^{\overline{x}}\,G^{\overline{x-1}})}{A\,G}-\frac{\int(A^{\overline{x}}\,F^{\overline{x-1}}\,G^{\overline{x-1}})}{A\,F\,G}-\frac{\int(A^{\overline{x}}\,F^{\overline{x-1}}\,H^{\overline{x-1}})}{A\,F\,H}-\frac{\int A^{\overline{x}}\,G^{\overline{x-1}}\,H^{\overline{x-1}}}{A\,G\,H}+\frac{\int A^{\overline{x}}\,F^{\overline{x-1}}\,G^{\overline{x-1}}\,H^{\overline{x-1}}}{A\,F\,G\,H}-\frac{\int(A^{\overline{x}}\,F^{\overline{x}})}{A\,F}-\frac{\int(A^{\overline{x}}\,G^{\overline{x}})}{A\,G}+\frac{\int(A^{\overline{x}}\,F^{\overline{x}}\,G^{\overline{x}})}{A\,F\,G}+\frac{\int(A^{\overline{x}}\,F^{\overline{x}}\,H^{\overline{x-1}})}{A\,F\,H}$$

$$+\frac{\int(A^{x}G^{x}H^{x-1})}{A\,G\,H} - \frac{\int(A^{x}F^{x}G^{x}H^{x-1})}{A\,F\,G\,H} =$$

$$\frac{F^{-1}}{F} E\,\overline{a\,(f-1)} + \frac{G^{-1}}{G} E\,\overline{a\,(g-1)}$$

$$- \frac{F^{-1}\,G^{-1}}{F\,G} E\,\overline{a\,(f-1)\,(g-1)} -$$

$$E\,\overline{af} - E\,\overline{ag} + E\,\overline{afg} -$$

$$\frac{F^{-1}\,H^{-1}}{F\,H} E\,\overline{a\,(f-1)\,(h-1)} -$$

$$\frac{G^{-1}\,H^{-1}}{G\,H} E\,\overline{a\,(g-1)\,(h-1)} +$$

$$\frac{F^{-1}\,G^{-1}\,H^{-1}}{F\,G\,H} E\,\overline{a\,(f-1)\,(g-1)\,(h-1)}$$

$$+ \frac{H^{-1}}{H} E\,\overline{af\,(h-1)} +$$

$$\frac{H^{-1}}{H} E\,\overline{ag\,(h-1)} -$$

$$\frac{H^{-1}}{H} E\,\overline{afg\,(h-1)}.$$

Wenn bestimmt werden sollte, wie wahrscheinlich es sey, dafs A lebe zu der Zeit, da C vor B verstorben, so hiefse dies eben so viel, als wie wahrscheinlich es ist, dafs A und B zusammen C überleben, und es wäre diese Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{\int(A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} \Delta C^{\overline{x-1}})}{A\ B\ C} = \frac{C^{\overline{-1}}}{C}\ \overline{E\ a\ b\ (c-1)} - \overline{E\ a\ b\ c}.$$

Anm. 1. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten, nämlich dafs *A lebe*, nachdem B nach C gestorben oder auch B vor C gestorben, lafsen sich durch die gewöhnlichen Lebens- und Verbindungsdauern ausdrucken. Wenn aber gefragt würde, wie wahrscheinlich es sey, dafs A sterbe, nachdem entweder B nach C gestorben ist oder auch C vor B, welche Fragen späterhin noch vorkommen, so ist der Ausdruck für die erste Wahrscheinlichkeit $\int \frac{\Delta A^{\overline{x-1}} \int \Delta B^{\overline{x-1}} (C - C^{\overline{x-1}})}{A\ B\ C}$, die letzten aber $= \int \frac{\Delta A^{\overline{x-1}} \cdot \int B^{\overline{x}}\ \Delta C^{\overline{x-1}}}{A\ B\ C}$.

Diese beiden Formeln erfordern eine doppelte Summirung, und sind nicht durch die gewöhnlichen Lebens- und Verbindungsdauern auszudrucken, wie sich weiterhin näher zeigen wird. Wenn die Frage dahin geht, wie wahrscheinlich es ist, dafs *überhaupt* A sterbe, nachdem B gestorben ist nach C, so kann man auch berechnen, wie wahrscheinlich es ist, dafs A lebe, nachdem B gestorben ist nach C, und die im Text angeführten Formel gebrauchen. Wenn es aber darauf ankömmt wie wahrscheinlich es ist, dafs *in einer bestimmten Zeit*, kleiner als die Altersergänzung von A, A sterbe, nachdem entweder B gestorben nach C oder B wenigstens überlebt hat C, so mufs nach den in dieser Anmerkung angegebenen Formeln gerechnet werden.

Anm. 2. Uebrigens habe ich im gegenwärtigen §., in Uebereinstimmung mit den §. §. 131 u. 215, das Ueberleben von B über C auf ganze Jahre, da wo es durch die jedes Jahr sterbenden B, deren C schon vorher gestorben sind, ausgedruckt wird, =

$$\frac{\int \Delta B^{\overline{x-1}} (C - C^{\overline{x-1}})}{B \quad C}$$ gesetzt. Wollte man etwa das zwiefache Ueberleben von A über die nach C verstorbenen B gebrauchen und sonst keine Correction berechnen, so könnte man es für die Praxis wohl =

$$\int \frac{A^{\overline{x}} \int \Delta B^{\overline{x-1}} (C - C^{\overline{x}})}{A \quad B \quad C}$$ setzen. Wenn man nämlich auf ganze Jahre rechnet, so bleiben in der Berechnung diejenigen A weg, die zwar B überleben aber doch in dem nämlichen Jahre mit B sterben. Setzt man aber in dem obigen Ausdruck $C^{\overline{x}}$ anstatt $C^{\overline{x-1}}$, so nimmt man an, dafs alle im xten Jahre abgehende C vor den in demselben Jahre abgehenden B sterben; der eine Mangel hebt also hier den andern gewifsermaafsen auf.

§. 218.

Falls bey dieser Wahrscheinlichkeit des zwiefachen Ueberlebens auf augenblickliche Theile des Jahrs gerechnet werden sollte, so würde die Rechnung auf folgende Weise anzustellen seyn.

Soll nämlich wieder zuerst C, dann B sterben, A aber noch leben, so ist die Wahrscheinlichkeit für irgend einen Augenblick des nten Jahrs =

$$\frac{A^{\overline{n-1}} - z \Delta A^{\overline{n-1}}}{A} \cdot \frac{\Delta B^{\overline{n-1}}}{B} dz \left(1 - \frac{C^{\overline{n-1}}}{C} + \frac{z \Delta C^{\overline{n-1}}}{C}\right) = \frac{A^{\overline{n-1}} \Delta B^{\overline{n-1}}}{A \quad B} dz -$$

$$\frac{\Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1}}{A\ B} z\,dz - \frac{A^{n-1} \Delta B^{n-1} C^{n-1}}{A\ B\ C} dz$$

$$+ \frac{\Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1} C^{n-1}}{A\ B\ C} z\,dz +$$

$$\frac{A^{n-1} \Delta B^{n-1} \Delta C^{n-1}}{A\ B\ C} z\,dz -$$

$$\frac{\Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1} \Delta C^{n-1}}{A\ B\ C} z^2\,dz,$$ woraus man, wenn nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird, den Werth für das nte Jahr $= \frac{A^{n-1} \Delta B^{n-1}}{A\ B}$

$$- \tfrac{1}{2} \frac{\Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1}}{A\ B} - \frac{A^{n-1} \Delta B^{n-1} C^{n-1}}{A\ B\ C}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \frac{\Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1} C^{n-1}}{A\ B\ C} +$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{A^{n-1} \Delta B^{n-1} \Delta C^{n-1}}{A\ B\ C} -$$

$$\tfrac{1}{3} \frac{\Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1} \Delta C^{n-1}}{A\ B\ C}$$ erhält. Setzt man aber $A^{n-1} - A^{n}$ anstatt ΔA^{n-1} etc. so wird die Wahrscheinlichkeit für alle Jahre $=$

$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{\int (A'^{0}\ B'^{0})}{A\ B} - \frac{\int (A'^{0}\ B'^{1})}{A\ B} + \frac{\int (A'^{1}\ B'^{0})}{A\ B} \right.$$

$$\left. - \frac{\int (A'^{1}\ B'^{1})}{A\ B} \right) - \tfrac{1}{3} \left(\frac{\int (A'^{0}\ B'^{0}\ C'^{0})}{A\ B\ C} \right.$$

$$- \frac{\int (A'^{0}\, B'^{1}\, C'^{0})}{A\ B\ C} + \frac{\int (A'^{1}\, B'^{0}\, C'^{1})}{A\ B\ C}$$

$$- \frac{\int (A'^{1}\, B'^{1}\, C'^{1})}{A\ B\ C}) - \tfrac{1}{6}\,(\frac{\int (A'\ B'^{0}\, C'^{0})}{A\ B\ C}$$

$$- \frac{\int (A'^{1}\, B'^{1}\, C'^{0})}{A\ B\ C} + \frac{\int (A'^{0}\, B'^{0}\, C'^{1})}{A\ B\ C}$$

$$- \frac{\int (A'^{0}\, B'^{1}\, C'^{1})}{A\ B\ C}).$$ Und da $\frac{\int (A^{0}\, B^{0})}{A\ B}$

$$- \frac{\int (A^{1}\, B^{1})}{A\ B} = 1,$$ imgleichen

$$\frac{\int (A^{0}\, B^{0}\, C^{0})}{A\ B\ C} - \frac{\int (A^{1}\, B^{1}\, C^{1})}{A\ B\ C} = 1,$$ so

hat man auch die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2}\,[\frac{A^{-1}}{A}\ E\,\overline{(a-1)\ b} -$$

$$\frac{B^{-1}}{B}\ E\,\overline{a\,(b-1)}\,] +$$

$$\tfrac{1}{3}\,[\frac{A^{-1}\ C^{-1}}{A\ C}\ E\,\overline{(a-1)\ b\ (c-1)} -$$

$$\frac{B^{-1}}{B}\ E\,\overline{a\,(b-1)\ c}\,] -$$

$$\tfrac{1}{6}\,[\frac{B^{-1}\ C^{-1}}{A\ B}\ E\,\overline{a\,(b-1)\ (c-1)} -$$

$$\frac{A^{-1}}{A}\ E\,\overline{(a-1)\ b\ c} +$$

$$\frac{A^{-1}\,B^{-1}}{A\;B}\;E\,\overline{(a-1)\;(b-1)\;c}\;-$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\;E\,\overline{a\;b\;(c-1)}\;].$$

Wenn man hiezu die Wahrscheinlichkeit nimmt, dafs zuerst B, dann C und zuletzt A stirbt, nämlich

$$\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\,[\frac{A^{-1}}{A}\;E\,\overline{(a-1)\;c}\;-$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\;E\,\overline{a\;(c-1)}\;]\;+$$

$$\tfrac{1}{3}\,[\frac{A^{-1}\,B^{-1}}{A\;B}\;E\,\overline{(a-1)\;(b-1)\;c}\;-$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\;E\,\overline{a\;b\;(c-1)}\;]\;-$$

$$\tfrac{1}{6}\,[\frac{B^{-1}\,C^{-1}}{B\;C}\;E\,\overline{a\;(b-1)\;(c-1)}\;-$$

$$\frac{A^{-1}}{A}\;E\,\overline{(a-1)\;b\;c}\;+$$

$$\frac{A^{-1}\,C^{-1}}{A\;C}\;E\,\overline{(a-1)\;b\;(c-1)}\;-$$

$$\frac{B^{-1}}{B}\;E\,\overline{a\;(b-1)\;c}\;],$$ so erhält man die

Summe $=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\,[\frac{A^{-1}}{A}\;E\,\overline{(a-1)\;b}\;+$

$$\frac{A^{-1}}{A} E\overline{(a-1)\,c} -$$

$$\frac{B^{-1}}{B} E\overline{a\,(b-1)} -$$

$$\frac{C^{-1}}{C} E\overline{a\,(c-1)}\,] +$$

$$\tfrac{1}{3}\,[\frac{A^{-1}}{A} E\overline{(a-1)\,b\,c} -$$

$$\frac{B^{-1}\,C^{-1}}{B\;C} E\overline{a\,(b-1)\,(c-1)}\,] +$$

$$\tfrac{1}{6}\,[\frac{A^{-1}\,C^{-1}}{A\;C} E\overline{(a-1)\,b\,(c-1)} -$$

$$\frac{B^{-1}}{B} E\overline{a\,(b-1)\,c} +$$

$$\frac{A^{-1}\;B^{-1}}{A\;B} E\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} -$$

$$\frac{C^{-1}}{C} E\overline{a\,b\,(c-1)}\,],$$ als die Wahrscheinlichkeit, dafs überhaupt A unter den drey Personen zuletzt stirbt. (S. §. 215).

Sollten ferner A und B diejenigen Personen seyn, welche zuletzt leben, F und G in der mittlern Zeit abgehen, P und Q aber zuerst sterben, so hätte man die vollständige Wahrscheinlichkeit für einen Augenblick des nten Jahrs

$$\frac{A^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}} - z\,\Delta A^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{A} \cdot \frac{B^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}} - z\,\Delta B^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{B} \times$$

$$\left[\left(1 - \frac{F^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{F}\right)\frac{\Delta G^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{G} + \left(1 - \frac{G^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{G}\right)\frac{\Delta F^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{F} + 2z\,\frac{\Delta F^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}\,\Delta G^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{F\,G}\right]\left[1 - \frac{P^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{P} + \frac{z\,\Delta P^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{P}\right]\left[1 - \frac{Q^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{Q} + \frac{z\,\Delta Q^{\frac{n-1}{\cdot\cdot}}}{Q}\right] dz,$$

woraus sich der Werth für jeden Fall finden läfst. Wenn aber auch nur vier Personen gegeben sind, und die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, dafs nachdem eine bestimmte Person unter denselben gestorben, zwey andre vor der vierten abgehen, so enthält der vollständige Ausdruck schon 48 verschiedene Verbindungsdauern für zwey, drey und vier Personen.

Viertes Kapitel.

Von

der Dauer des Ueberlebens unter mehreren Personen.

§. 219.

Wenn man die Zeiten, während welcher unter einer Anzahl von Vereinen, die anfänglich aus m Personen bestehen, die Verbindungen von m — u bestimmten Personen ungetrennt fortdauern, nachdem die übrigen Personen abgegangen sind, zusammennimmt, und deren Summe durch die anfängliche Zahl der Vereine dividirt, so erhält man die *mittlere Dauer des Ueberlebens*, oder kürzer das mittlere Ueberleben, der bestimmten Verbindung nach m — u. Ist m — u = 1, so hat man das Ueberleben einer einzigen Person über die andern mitverbundenen m — 1.

§. 220.

Wird das *Absterben der Einzelnen als gleichmäfsig* angenommen, und sind anfänglich m Personen von dem nämlichen Alter a, wozu die Ergänzung α gehören mag, verbunden, so ist das mittlere Ueberleben der Verbindung von m — 1 bestimmten Personen über die mte Person =

$\frac{\int (\alpha - x)^{m-1} x\,dx}{\alpha^m}$, das mittlere Ueberleben der Verbindung von $m - 2$ bestimmten Personen über die beiden übrigen $=$

$\frac{\int (\alpha - x)^{m-2} x^2\,dx}{\alpha^m}$, so wie überhaupt das mittlere Ueberleben der bestimmten Verbindung vom Grade $m - u = \frac{\int (\alpha - x)^{m-u} x^u\,dx}{\alpha^m}$.

Es ist aber $\frac{\int (\alpha - x)^{m-u} x^u\,dx}{\alpha^m} =$

$\frac{1}{\alpha^m}(\alpha^{m-u}\int x^u\,dx - \frac{m-u}{1}\alpha^{m-u-1}\int x^{u+1}\,dx + \frac{m-u.m-u-1}{1.2}\alpha^{m-u-2}\int x^{u+2}\,dx - \ldots \mp \int x^m\,dx)$, und, wenn man integrirt, demnächst $x = \alpha$ setzt, und mit α^m dividirt, so wird

$\frac{\int (\alpha - x)^{m-u} x^u\,dx}{\alpha^m} = \frac{\alpha}{u+1} - \frac{m-u}{1}\frac{\alpha}{u+2} + \frac{m-u.m-u-1}{1.2}\frac{\alpha}{u+3} - \ldots \mp \frac{\alpha}{m+1}$. Nun ist aber $\alpha(\frac{1}{u+1} - \frac{m-u}{1}\frac{1}{u+2} + \frac{m-u.m-u-1}{1.2}\frac{1}{u+3} - \ldots \mp \frac{1}{m+1}) = \frac{1.2..u}{m.m-1..m-u+1}.\frac{\alpha}{m+1}$ (Siehe Anm. 1 im gegenwärtigen §.); folglich wird

$\frac{\int (\alpha - x)^{m-u} x^u\,dx}{\alpha^m} = \frac{1.2..u}{m.m-1..m-u+1}\frac{\alpha}{m+1}$.

Ferner ist nach der Hypothese $\frac{\alpha}{u+1} =$ E au, d. h. gleich der mittlern Dauer der Verbindung von u Personen des zur Ergänzung α gehörigen Alters a, $\frac{\alpha}{u+2} =$ Eau+1, $\frac{\alpha}{u+3} =$ E au+2 etc. (§. 203 b.). Folglich hat man auch das mittlere Ueberleben einer Verbindung unter m — u bestimmten Personen über die übrigen u $=$ E au — $\frac{m-u}{1}$ E au+1 + $\frac{m-u \,.\, m-u-1}{1 \,.\, 2}$ E au+2 — .. $\pm$ E am, wobey $\frac{m-u}{1}$, $\frac{m-u \,.\, m-u-1}{1 \,.\, 2}$ etc. die Anzahl der möglichen Verbindungen nach 1, 2 etc. unter den m — u überlebenden Personen bezeichnen.

Wird also z. B. das mittlere Ueberleben einer einzigen bestimmten Person, die mit einer andern gleichen Alters verbunden ist, gesucht, so hat man $\frac{\int (\alpha - x)\, x\, dx}{\alpha^2} = \frac{\int x\, dx}{\alpha} - \frac{\int x^2\, dx}{\alpha^2}$ $= \frac{x^2}{2\alpha} - \frac{x^3}{3\alpha^2}$, welches, wenn $x = \alpha$ ist, $= \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{6}$ wird, wie schon vorher im dritten Abschnitt angegeben worden. Suchte man bey einer anfänglichen Verbindung von drey Personen vom Alter a das mittlere Ueberleben einer bestimmten Verbindung von zwey Personen über die

dritte, so hätte man $\frac{\int (\alpha - x)^2 \, x \, dx}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^3}\left(\frac{\alpha^2 x^2}{2} - \frac{2\alpha x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) = \frac{\alpha}{2} - \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{12}$, wenn nämlich $x = \alpha$ ist. Eben so ist das mittlere Ueberleben einer einzigen bestimmten Person unter dreien von gleichem Alter über die beiden andern $= \frac{\int (\alpha - x) \, x^2 \, dx}{\alpha^3} = \frac{x^3}{3\alpha^2} - \frac{x^4}{4\alpha^3} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{12}$ für $x = \alpha$ genommen.

Anm. 1. Der in diesem §. angeführte Satz, dafs

$$\frac{1}{u+1} - \frac{m-u}{1}\cdot\frac{1}{u+2} + \frac{m-u.m-u-1}{1.2}\cdot\frac{1}{u+3} - \ldots + \frac{1}{m+1} = \frac{1.2\ldots u}{m.m-1\ldots m-u+1}\cdot\frac{1}{m+1}$$

sey, ergiebt sich folgendermaafsen.

Wenn man zuerst die Reihe $1 - \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{m.m-1}{1.2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4} + \ldots + \frac{m.m-1\ldots 1}{1.2\ldots m}\cdot\frac{1}{m+1} = S$ nimmt, so ist $1 - (m+1)S = 1 - \frac{m+1}{1} + \frac{m+1.m}{1.2} - \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3} + \ldots + 1 = (1-1)^{m+1} = 0$, folglich $(m+1)S = 1$, und $S = \frac{1}{m+1}$.

Ferner ist $S =$

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{m-1.m-2}{1.2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3} \cdot \frac{1}{4} \\ - \frac{1}{2} + \frac{m-1}{1} \cdot \frac{1}{3} - \frac{m-1.m-2}{1.2} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \begin{cases} + \,.\, - \dfrac{m-1.m-2\,..\,1}{1.2\,..\,m-1} \cdot \dfrac{1}{m} \\ + \,.\, - \dfrac{m-1.m-2\,..\,2}{1.2\,..\,m-2} \cdot \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1}, \end{cases}$$

oder $S = T - U$. Da nun, nach dem vorhergehenden, $T = \frac{1}{m}$, so ist $U = T - S = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m+1.m}$.

Weiter ist $U =$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{m-2}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{m-2.m-3}{1.2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{m-2.m-3.m-4}{1.2.3} \cdot \frac{1}{5} \\ - \frac{1}{3} + \frac{m-2}{1} \cdot \frac{1}{4} - \frac{m-2.m-3}{1.2} \cdot \frac{1}{5} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \begin{cases} + \,.\, - \dfrac{m-2.m-3\,..\,1}{1.2\,..\,m-2} \cdot \dfrac{1}{m} \\ + \,.\, - \dfrac{m-2.m-3\,..\,2}{1.2\,..\,m-3} \cdot \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1}, \end{cases}$$

oder $U = V - W$. Nun ist nach dem vorhergehenden $V = \frac{1}{m.m-1}$, folglich $W = V - U = \frac{1}{m.m-1} - \frac{1}{m+1.m} = \frac{1.2}{m+1.m.m-1}$.

Wenn man ferner auf eine ähnliche Art W in zwey Reihen zerlegt, nämlich in $X = \frac{1}{3} - \frac{m-3}{1} \cdot \frac{1}{4} + \,.\, - \frac{m-3.m-4\,..\,1}{1.2\,..\,m-3} \cdot \frac{1}{m}$ und $Y =$

$$\frac{1}{4} - \frac{m-3}{1} \cdot \frac{1}{5} \dagger \ldots \dagger$$

$$\frac{m-3 \cdot m-4 \ldots 2}{1 \cdot 2 \ldots m-4} \cdot \frac{1}{m} \dagger \frac{1}{m+1},$$ so ist nach dem Vorhergehenden $X = \frac{1 \cdot 2}{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}$, und

$$Y = X - W = \frac{1 \cdot 2}{m \cdot m - 1 \cdot m - 2} -$$

$$\frac{1 \cdot 2}{m+1 \cdot m \cdot m-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2} \text{ etc.}$$

Anm. 2. Man kann indefsen das mittlere Ueberleben unter Personen von gleichem Alter nach der Hypothese noch leichter finden. Es ist nämlich unter der oben erwähnten Voraufsetzung, wenn anfänglich eine Verbindung nach m besteht und α die Altersergänzung ist, das mittlere Ueberleben aller gleichnamigen Verbindungen, von welchem Grade sie auch seyn mögen, zusammengenommen über die nächsthöhere Verbindung $= \frac{\alpha}{m+1}$, indem der Voraufsetzung nach die Zeiten von dem Abgange irgend einer Person an bis zum Abgange der nächstfolgenden gleich sind. Nun sind aber unter m Personen $\frac{m \cdot m-1 \ldots u+1}{1 \cdot 2 \ldots m-u}$ Verbindungen vom Grade $m-u$, oder auch $\frac{m \cdot m-1 \ldots m-u+1}{1 \cdot 2 \ldots u}$ Verbindungen vom Grade u, deren Anzahl der Zahl derer vom Grade $m-u$ gleich ist. Folglich ist das mittlere Ueberleben jeder einzelnen bestimmten Verbindung vom Grade

$$m-u = \frac{1 \cdot 2 \ldots m-u}{m \cdot m-1 \ldots u+1} \cdot \frac{\alpha}{m+1},$$

$$\text{oder auch} = \frac{1 \cdot 2 \ldots u}{m \cdot m-1 \ldots m-u+1} \cdot \frac{\alpha}{m+1},$$

So ist z. B. in einem Vereine von drey Personen das mittlere Ueberleben einer bestimmten Verbindung zu zwey $= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{12}$, imgleichen das mittlere Ueberleben einer einzigen bestimmten Person $= \frac{1}{3} \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{12}$, wie schon oben angegeben worden.

§. 221.

Suchte man wieder nach der Hypothese bey einer anfänglichen Verbindung nach m unter Personen von verschiedenen Altern, wozu die Ergänzungen α, β, γ .. $\varkappa$ gehören mögen, das mittlere Ueberleben einer bestimmten Verbindung nach m — u unter Personen, deren Altersergänzungen α, β, γ, δ, über die andern u Personen, denen die Altersergänzungen ε, η, .. $\varkappa$ zugehören, so wäre der allgemeine Ausdruck dafür $=$

$$\frac{\int (\alpha - x)\,(\beta - x)\,..\,(\delta - x)\,x^u\,dx}{\alpha\ \beta\ ..\ \delta\ .\ \varepsilon\ \eta\ ..\ \varkappa}.$$

Das aus den zweitheiligen Factoren des Zählers bestehende Product wird, wenn man multiplicirt, $=$ $\alpha\beta\,..\,\delta - Px + Qx^2 - Rx^3 + .. \pm Tx^{m-u-1} \mp x^{m-u}$, wo P die Summe aller Verbindungen nach m — u — 1 unter den m — u Zahlen $\alpha, \beta, .. \delta$, Q die Summme der Verbindungen nach m — u — 2 unter denselben Zahlen, R die Summe der Verbindungen nach m — u — 3 etc., so wie T die Summe aller einfachen Factoren $\alpha, \beta, .. \delta$

ist. Multiplicirt man nun jeden Theil mit $x^u\,dx$ und integrirt, so wird

$$\frac{\int(\alpha - x)(\beta - x)\,..\,(\delta - x)\,x^u\,dx}{\alpha\,\beta\,..\,\delta.\varepsilon\,\eta\,..\,\varkappa} =$$

$$\frac{1}{\alpha\,\beta\,..\,\delta.\varepsilon\,..\,\varkappa}\,(\alpha\,\beta\,..\,\delta\,\frac{x^{u+1}}{u+1} - P\frac{x^{u+2}}{u+2} +$$

$$Q\,\frac{x^{u+3}}{u+3} - R\,\frac{x^{u+4}}{u+4} - .. - T\frac{x^m}{m} \mp$$

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}).$$

Setzt man x gleich der kleinsten Altersergänzung, so hat man das gesuchte Ueberleben *bis zum Ablauf der kleinsten Altersergänzung.*

Wenn also die älteste Person von der Altersergänzung γ unter den Ueberlebenden ist, so erhält man auf einmal den vollständigen Werth, indem nach Ablauf der Altersergänzung γ keine Verbindung nach m — u unter den überlebenden Personen Statt findet. Wenn aber eine Altersergänzung unter den zu überlebenden Personen, z. B. η, kleiner ist als die kleinste Altersergänzung unter den Ueberlebenden, so dauert nach Ablauf der Zeit η das Ueberleben der m — u Personen fort; da aber im Zähler des zu integrirenden Ausdrucks einer von den u Factoren in x^u nun $= \eta$ geworden ist und nicht weiter wachsen kann, so wird $\frac{x}{\eta} = 1$, und es fällt im Zähler einer der u gleichen Factoren, im Nenner aber der Factor η weg. Will man das Ueberleben für die Zeit y, nämlich vom Ablauf der kleinsten Altersergänzung bis zum Ablauf

der nächst gröfsern, besonders berechnen, so mufs man, da $\alpha, \beta, \ldots \delta$ jedes im Anfange dieses Zeitraums um η kleiner geworden sind, im Zähler anstatt α, β etc. setzen $\alpha - \eta, \beta - \eta$ etc. Also wird das Ueberleben für diesen Zeitraum $=$

$$\frac{\int (\alpha - \eta - y)\,(\beta - \eta - y) \ldots (\delta - \eta - y)\, y^{u-1}\, dy}{\alpha\ \beta\ \ldots\ \delta \cdot \varepsilon\ \ldots\ \varkappa}.$$

Giebt es aufser η noch eine andre Altersergänzung unter den zu überlebenden Personen, z. B. $\varkappa$, die kleiner ist als die kleinste Altersergänzung unter den Ueberlebenden, so fällt noch ein Factor y im Zähler und $\varkappa$ im Nenner weg, und es ist im Zähler $\alpha - \varkappa$ anstatt α, $\beta - \varkappa$ anstatt β etc. zu setzen. Man hat also hier aufser der ersten Berechnung noch so viele Theil-Berechnungen anzustellen als verschiedene Altersergänzungen unter den zu überlebenden Personen vorhanden, die kleiner als die kleinste Altersergänzung unter den Ueberlebenden sind. Uebrigens werden schliefslich alle einzelne Theile des Ueberlebens zusammen addirt. Um der Weitläufigkeit dieser Berechnung zu entgehen, ist es am rathsamsten, wenn nicht die kleinste Altersergänzung einer der überlebenden Personen zugehört, auch selbst bey der Hypothese des gleichmässigen Absterbens die im folgenden §. angeführte Formel zu gebrauchen.

Beyspiel: Wenn $m = 4$ ist, die Altersergänzungen der vier Personen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ heifsen, und das Ueberleben der drey Personen A B C über die vierte gesucht wird, so hat man dafselbe $=$

$\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\alpha\ \beta\ \gamma\ \frac{x^2}{2} - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\ \frac{x^3}{3}\right.$

$\left. + (\alpha + \beta + \gamma)\ \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]$, und wenn γ die kleinste Altersergänug ist, so wird das vollständige Ueberleben bis zu Ablauf der Zeit $\gamma =$

$\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\frac{\alpha\beta\gamma^3}{2} - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\frac{\gamma^3}{3} + \right.$

$\left.(\alpha+\beta+\gamma)\ \frac{\gamma^4}{4} - \frac{\gamma^5}{5}\right] = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\alpha\ \beta\ \frac{\gamma^3}{2\cdot 3}\right.$

$\left. - (\alpha + \beta)\ \frac{\gamma^4}{3\cdot 4} + \frac{\gamma^5}{4\cdot 5}\right]$. Das Ueberleben der beiden Personen A, B über die beiden andern ist $=$

$\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\alpha\ \beta\ \frac{x^3}{3} - (\alpha + \beta)\ \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]$, und, wenn β die kleinste Altersergänzung ist, so wird der vollständige Werth $= \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\alpha\ \beta\ \frac{\beta^3}{3} - (\alpha+\beta)\frac{\beta^4}{4}\right.$

$\left. + \frac{\beta^5}{5}\right] = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\alpha\ \frac{\beta^4}{3\cdot 4} - \frac{\beta^5}{4\cdot 5}\right)$. Endlich wird das Ueberleben der einen Person A über die andern drey $= \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\alpha\ \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)$, und wenn α die kleinste Altersergänzung, $= \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{\alpha^5}{4}\right.$

$\left. - \frac{\alpha^5}{5}\right) = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot\frac{\alpha^5}{4\cdot 5}$.

Anm. So wie in den beiden vorhergehenden §. das vollständige Ueberleben nach der Hypothese bestimmt ist, könnte man auch den Werth desselben finden, wenn es etwa nur auf

volle Jahre berechnet werden sollte, indem man in den angegebenen Formeln anstatt $\alpha - x$, $\beta - x$ etc. die Werthe $\alpha - n$, $\beta - n$ etc., imgleichen anstatt $\int dx$, $\int x\,dx$ etc. die Summen der natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung, oder $\int n^0$, $\int n^1$ etc. setzte. Durch Subtraction dieser Werthe von den vollständigen Werthen erhielte man einen allgemeinen Ausdruck für die *Correction* des Ueberlebens, falls es nur auf ganze Jahre berechnet wäre. Ich glaube aber eine weitere Auseinandersetzung hier sparen zu können, da von der Correction noch unten geredet werden wird.

§. 222.

Wenn anfänglich die Personen A, B, C, D, F, G, H von den Altern a, b, c, d, f, g, h verbunden sind, und *nach jeder Sterbensordnung ohne Unterschied* das Ueberleben der vier verbundenen Personen A, B, C, D über die drey übrigen zusammengenommen, d. h. die Dauer der ungetrennten Verbindung unter ABCD nachdem die letzte der übrigen Personen verstorben ist, gesucht wird, so ist, auf volle Jahre gerechnet, dieses Ueberleben für das xte Jahr =

$$\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}\,(F-F^{\overline{x}})\,(G-G^{\overline{x}})\,(H-H^{\overline{x}})}{A\;B\;C\;D\qquad\qquad F\;G\;H}$$

$$= \frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{A\;B\;C\;D} - \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}\,F^{\overline{x}}}{A\;B\;C\;D\;F} \\ \dfrac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}\,G^{\overline{x}}}{A\;B\;C\;D\;G} \\ \dfrac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}\,H^{\overline{x}}}{A\;B\;C\;D\;H} \end{array} \right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}F^{x}G^{x}}{A\ B\ C\ D\ F\ G}\\[2ex]\dfrac{A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}F^{x}H^{x}}{A\ B\ C\ D\ F\ H}\\[2ex]\dfrac{A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}G^{x}H^{x}}{A\ B\ C\ D\ G\ H}\end{array}\right\}-$$

$$\frac{A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}F^{x}G^{x}H^{x}}{A\ B\ C\ D\ F\ G\ H}.$$

Folglich erhält man das Ueberleben für alle Jahre =

$$\frac{\int(A^{x}B^{x}C^{x}D^{x})}{A\ B\ C\ D}-\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\int(A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}F^{x})}{A\ B\ C\ D\ F}\\[2ex]\dfrac{\int(A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}G^{x})}{A\ B\ C\ D\ G}\\[2ex]\dfrac{\int(A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}H^{n})}{A\ B\ C\ D\ H}\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\int(A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}F^{x}G^{x})}{A\ B\ C\ D\ F\ G}\\[2ex]\dfrac{\int(A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}F^{x}H^{x})}{A\ B\ C\ D\ F\ H}\\[2ex]\dfrac{\int(A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}G^{x}H^{x})}{A\ B\ C\ D\ G\ H}\end{array}\right\}-$$

$$\frac{\int(A^{x}B^{x}C^{x}D^{x}F^{x}G^{x}H^{x})}{A\ B\ C\ D\ F\ G\ H}=$$

$$E\,\overline{a\,b\,c\,d} - \left\{\begin{matrix} E\,\overline{a\,b\,c\,d\,f} \\ E\,\overline{a\,b\,c\,d\,g} \\ E\,\overline{a\,b\,c\,d\,h} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} E\,\overline{a\,b\,c\,d\,f\,g} \\ E\,\overline{a\,b\,c\,d\,f\,h} \\ E\,\overline{a\,b\,c\,d\,g\,h} \end{matrix}\right\} -$$

$$E\,\overline{a\,b\,c\,d\,f\,g\,h}.$$

Sieht man nun die hier zusammengestellten Theile von gleichviel Dimensionen als ein einziges Glied an, so ist das erste Glied gleich der Verbindungsdauer der vier überlebenden Personen, das zweite Glied gleich der Summe der mittlern Dauer aller Verbindungen der vier überlebenden Personen zusammengenommen mit je einer der zu überlebenden, das dritte Glied gleich der Summe der mittlern Dauer aller Verbindungen der vier überlebenden zusammengenommen mit je zwey der zu überlebenden, und das vierte Glied ist die mittlere Dauer der Verbindung der vier überlebenden Personen zusammengenommen mit den drey zu überlebenden. Wenn man ferner mit $E\,\overline{IV}$ die mittlere Verbindungsdauer der vier überlebenden Personen, mit $E\,\overline{IV\,.\,I}$, $E\,\overline{IV\,.\,II}$ etc. die Dauer der Verbindung der vier überlebenden Personen mit irgend einer, mit irgend zwey etc. der zu überlebenden Personen, ferner mit $S.E\,\overline{IV\,.\,I}$, $S.E\,\overline{IV\,.\,II}$ etc. die Summen der mittlern Dauer aller Verbindungen zwischen den vier überlebenden Personen zusammengenommen mit je einer, je zwey etc. der zu überlebenden Personen bezeichnet, so hat man das gesuchte Ueberleben =

$$E\,\overline{IV} - S.E\,\overline{IV.I} + S.E\,\overline{IV.II} - E\,\overline{IV.III}.$$

Da auch ein Product von der Form

$$\frac{(F-F^{\overset{x}{-}})\ (G-G^{\overset{x}{-}})\ (H-H^{\overset{x}{-}})\ (K-K^{\overset{x}{-}})\ (L-L^{\overset{x}{-}})}{F\quad G\quad H\quad K\quad L},$$

aus wie vielen Factoren es auch bestehen mag, wenn man daſselbe in seine Theile auflöset, immer folgende Form hat:

$$1 - \left\{\begin{array}{c} \dfrac{F^{\overset{x}{-}}}{F} \\[2ex] \dfrac{G^{\overset{x}{-}}}{G} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \dfrac{F^{\overset{x}{-}}\ G^{\overset{x}{-}}}{F\ G} \\[2ex] \dfrac{F^{\overset{x}{-}}\ H^{\overset{x}{-}}}{F\ H} \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} \dfrac{F^{\overset{x}{-}}G^{\overset{x}{-}}H^{\overset{x}{-}}}{F\ G\ H} \\[2ex] \dfrac{F^{\overset{x}{-}}G^{\overset{x}{-}}K^{\overset{x}{-}}}{F\ G\ K} \end{array}\right\}$$

$$+ \cdot\cdot \qquad + \cdot\cdot \qquad + \cdot\cdot$$

$$+ \left\{\begin{array}{c} \dfrac{F^{\overset{x}{-}}\ G^{\overset{x}{-}}\ H^{\overset{x}{-}}\ K^{\overset{x}{-}}}{F\ G\ H\ K} \\[2ex] \dfrac{F^{\overset{x}{-}}\ G^{\overset{x}{-}}\ H^{\overset{x}{-}}\ L^{\overset{x}{-}}}{F\ G\ H\ L} \\[2ex] + \cdot\cdot \end{array}\right\} - \cdot\cdot$$

so sieht man leicht, daſs das obige Gesetz allgemein gelten müſse. Wenn also die Anzahl der Personen, woraus anfänglich die Verbindung besteht, $=$ m ist und das Ueberleben von m $-$ u oder n bestimmten Personen zusammengenommen über die übrigen u Personen gesucht wird, wenn ferner E N wieder die mittlere Dauer der Verbindung der bestimmten n überlebenden Personen zusammengenommen, E $\overline{N.I}$, E $\overline{N.II}$ etc. die Dauer der mittlern Verbindung zwischen den n überlebenden Personen zu-

sammengenommen mit irgend einer, mit irgend zwey etc. der zu überlebenden Personen, auch $S.E\overline{N.I}$, $S.E\overline{N.II}$ etc. die Summen dieser Verbindungsdauern bezeichnen, so ist das gesuchte mittlere Ueberleben $= EN - S.E\overline{N.I} + S.E\overline{N.II} - S.E\overline{N.III} + .. \mp EN.U$, wo das letzte Glied bejaht ist, wenn u eine gerade Zahl, und verneinnt, wenn u ungerade ist.

Wenn z. B. zwey Personen vom Alter a und b anfänglich verbunden sind, so ist das mittlere Ueberleben der Person $A = Ea - E\overline{ab}$ (§. 137). Besteht die anfängliche Verbindung aus drey Personen vom Alter a, b und c, so ist das Ueberleben der Person A über die beiden andern zusammengenommen $= Ea - (E\overline{ab} + E\overline{ac}) + E\overline{abc}$, das Ueberleben der beiden verbundenen Personen A und B über die dritte $= Eab - E\overline{abc}$. Sind anfänglich vier Personen verbunden, so hat man das Ueberleben von A über die drey andern zusammengenommen $= Ea - (E\overline{ab} + E\overline{ac} + E\overline{ad}) + (E\overline{abc} + E\overline{abd} + E\overline{acd}) - E\overline{abcd}$, das Ueberleben der beiden verbundenen Personen A und B über die beiden andern $= E\overline{ab} - (E\overline{abc} + E\overline{abd}) + E\overline{abcd}$, und das Ueberleben der drey Personen A, B und C zusammengenommen über die vierte $= E\overline{abc} - E\overline{abcd}$.

Fafst man, wie hier geschehen, diejenigen Theile, welche gleichviel Dimensionen haben, in ein Glied zusammen, so ergiebt sich die Anzahl der Theile jedes Gliedes aus der Anzahl der zu überlebenden Personen. Ist eine einzige Person zu überleben, so giebt es, aufser der einen Verbindung der überlebenden Personen unter einander, nur eine Verbindung der überlebenden Personen mit der einen zu überlebenden, und der Ausdruck für das Ueberleben hat zwey Glieder, wovon jedes nur einen Theil hat. Sollen zwey Personen überlebt werden, so giebt es, aufser der einen Verbindung der überlebenden Personen, zwey Verbindungen dieser zusammengenommen mit je einer der zu überlebenden, und eine einzige Verbindung der überlebenden mit den beiden zu überlebenden; man hat also drey Glieder, wovon das erste und letzte einen, das zweite aber zwey Theile hat. Sind überhaupt n Personen zu überleben, so erhält man $n + 1$ Glieder, und die Anzahl der Theile des ersten Gliedes ist $= 1$, des zweiten $= n$, des dritten $= \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$, des vierten $= \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc.

Wenn also die anfängliche Anzahl der verbundenen Personen $= m$ und alle von gleichem Alter a sind, so ist das mittlere Ueberleben von $m - u$ bestimmten Personen über die übrigen u zusammengenommen $= E\, a^{m-u} - \frac{u}{1} E\, a^{m-u+1} + \frac{u \cdot u - 1}{1 \cdot 2} E\, a^{m-u+2} - \ldots \pm E\, a^{m}$.

Anm. 1. Dieser letzte Ausdruck ist von dem im §. 220 angegebenen, wonach das Ueberleben der m — u bestimmten Personen $= Ea^{u} - \frac{m-u}{1} E a^{u+1} + \frac{m-u \,.\, m-u-1}{1 \,.\, 2} E a^{u+2} - ..$, der Form nach verschieden. Indefsen geben doch beide Ausdrücke, wenn das Alter der Personen und die jährlichen Decremente der einzelnen Lebenden gleich sind, dafselbe Resultat. Es ist nämlich, wie vorher gezeigt worden,

$$\frac{m \,.\, m-1 \,..\, m-u+1}{1 \,.\, 2 \,..\, u} \frac{\int (\alpha - x)^{m-u} x^{u} \, dx}{\alpha^{m}} = \frac{\alpha}{m+1} = \frac{m \,.\, m-1 \,..\, u+1}{1 \,.\, 2 \,..\, m-u} \frac{\int (\alpha - x)^{u} x^{m-u} \, dx}{\alpha^{m}},$$

und folglich

$$\frac{\int (\alpha - x)^{m-u} x^{u} \, dx}{\alpha^{m}} = \frac{\int (\alpha - x)^{u} x^{m-u} \, dx}{\alpha^{m}} = E a^{m-u} - \frac{m-u}{1} E a^{m-u+1} + ..$$

Der Grund des Unterschiedes in der Form beider Ausdrücke liegt darin, dafs vorher die Anzahl der überlebenden Personen, hier aber die der zu überlebenden Personen durch zweitheilige Factoren bezeichnet worden.

Anm. 2. Uebrigens bemerke ich noch ausdrücklich, dafs hier unter $S \,.\, E \overline{N \,.\, I}$ die Summe der Dauer aller Verbindungen von n Personen zusammengenommen mit je einer der übrigen m — n verstanden worden. Wo später die Bezeichnung $S \,.\, E \overline{N+I}$ vorkömmt, ist darunter die Summe der Dauer aller Verbindungen nach n + 1 unter den gegebenen m Personen

zu verstehn, wo also auch die zwischen den Einzelnen unter den n Personen und den übrigen m — n Statt findenden Verbindungen nach n + 1 mitgezählt werden.

§. 223.

In den vorhergehenden §. §. ist vorausgesetzt, dafs das Ueberleben nur auf ganze Jahre bestimmt werde, so dafs nur in Betracht kömmt, wie viel Vereine der überlebenden Personen am Ende jedes Jahrs bestehen, imgleichen wie viele Vereine der zu überlebenden Personen zu der nämlichen Zeit ausgestorben sind, und es ist dabey angenommen, dafs die erstern Vereine die letztern um ein ganzes Jahr überlebt haben. Die Anzahl der erstern nimmt indefsen vom Anfange des Jahrs bis zum Ende defselben ab, so wie die Anzahl der ausgestorbenen Vereine unter den übrigen Personen während des ganzen Jahrs zunimmt. Soll auch hierauf Rücksicht genommen werden, so läfst sich freilich eine Formel für die *Correction* des vorhin gefundenen Ueberlebens angeben; da indefsen schon der im §. 209 angegebene Ausdruck für die Correction der Verbindungsdauer mehrerer Personen ziemlich zusammengesetzt ist, so ergiebt sich von selbst, dafs die Formel für die Correction des Ueberlebens noch weitläufiger seyn müfse, und für die Ausübung nicht bequem seyn könne.

Wenn aber die Theile des Jahrs mit in Rechnung kommen sollen, A und B die überlebenden

Personen sind und der Kürze wegen $A^{\overline{n-1}} - x \Delta A^{\overline{n-1}}$ mit $A^{\overline{m+x}}$, $B^{\overline{n-1}} - x \Delta B^{\overline{n-1}}$ mit $B^{\overline{m+x}}$ etc. bezeichnet wird, so ist bey Ablauf der Zeit x im nten Jahre das vollständige Ueberleben =

$$\frac{\int A^{\overline{m+x}} B^{\overline{m+x}} (F - F^{\overline{m+x}}) (G - G^{\overline{m+x}}) \, dx}{A \; B \; F \; G} =$$

$$\frac{\int A^{\overline{m+x}} B^{\overline{m+x}} \, dx}{A \; B} - \frac{\int A^{\overline{m+x}} B^{\overline{m+x}} F^{\overline{m+x}} \, dx}{A \; B \; F}$$

$$- \frac{\int A^{\overline{m+x}} B^{\overline{m+x}} G^{\overline{m+x}} \, dx}{A \; B \; G} +$$

$$\frac{\int A^{\overline{m+x}} B^{\overline{m+x}} F^{\overline{m+x}} G^{\overline{m+x}} \, dx}{A \; B \; F \; G},$$

wo der entwickelte Ausdruck eben dieselbe Form hat als der im §. 222 angegebene. Wenn man nun in jedem Gliede anstatt $A^{\overline{m+x}}$, $B^{\overline{m+x}}$ etc. wieder $A^{\overline{n-1}} - x \Delta A^{\overline{n-1}}$, $B^{\overline{n-1}} - x \Delta B^{\overline{n-1}}$, oder auch $A^{\overline{n}} + (1-x) \Delta A^{\overline{n-1}}$, $B^{\overline{n}} + (1-x) \Delta B^{\overline{n-1}}$ etc. setzt, so erhält man lauter Ausdrücke für die vollständigen Verbindungsdauern während des nten Jahrs, und durch Zusammenlegung der Werthe für alle Jahre die vollständigen Verbindungsdauern bis zum gänzlichen Absterben der ältsten Person in jeder Verbindung. Um also das mittlere Ueberleben vollständig zu erhalten, darf man nur in

der in dem §. 222 angegebenen Formel auf ganze Jahre die vollständigen Werthe aller Verbindungsdauern setzen.

Uebrigens sieht man leicht, dafs man die vollständigen Werthe nicht nur durch die hinzuzufügenden Correctionen, sondern auch durch die im §. 209. b. angegebenen Ausdrücke für die Verbindungsdauern erhalten könne. Für das Ueberleben von A über B und C in einem Vereine dreier Personen, wofür der Ausdruck auf ganze Jahre $Ea - E\overline{ab} - E\overline{ac} + E\overline{abc}$, erhielte man also

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,E\overline{a-1} + \tfrac{1}{2}\,Ea -$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{A^{\overline{-1}}\,B^{\overline{-1}}}{A\;B}\,E\overline{(a-1)(b-1)} -$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,E\overline{(a-1)\,b} -$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,E\overline{a\,(b-1)} - \tfrac{1}{3}\,E\overline{ab} -$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{A^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{A\;C}\,E\overline{(a-1)\,(c-1)} -$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,E\overline{(a-1)\,c} -$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{C^{\overline{-1}}}{C}\,E\overline{a\,(c-1)} - \tfrac{1}{3}\,E\overline{ac} +$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{A^{-1}B^{-1}C^{-1}}{A\;B\;C}\,E\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}+$$

$$\frac{1}{12}\,\frac{A^{-1}B^{-1}}{A\;B}\,E\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,c}+$$

$$\frac{1}{12}\,\frac{A^{-1}C^{-1}}{A\;C}\,E\,\overline{(a-1)\,b\,(c-1)}+$$

$$\frac{1}{12}\,\frac{B^{-1}C^{-1}}{B\;C}\,E\,\overline{a\,(b-1)\,(c-1)}+$$

$$\frac{1}{12}\,\frac{A^{-1}}{A}\,E\,\overline{(a-1)\,b\,c}+$$

$$\frac{1}{12}\,\frac{B^{-1}}{B}\,E\,\overline{a\,(b-1)\,c}+$$

$$\frac{1}{12}\,\frac{C^{-1}}{C}\,E\,\overline{a\,b\,(c-1)}+\frac{1}{4}\,E\,\overline{a\,b\,c}.\ \text{etc.}$$

§. 224.

Bisher ist das Ueberleben *collectiv* betrachtet, d. h. in der Bedeutung, dafs eine Person oder ein Verein eines bestimmten Grades alle übrigen Mitgenofsen überlebe. Es kann indefsen auch das Ueberleben *disjunctiv* genommen werden, d. h. in dem Sinne, dafs eine bestimmte Person oder ein bestimmter Verein irgend eine einzelne Person unter den übrigen oder irgend eine gegebene Verbindung unter mehreren ähnlichen überlebe. Um dieses disjunctive Ueberleben zu bestimmen, mufs man alle

Fälle zusammen nehmen, wo auf einer Seite die eine Person lebt oder der bestimmte Verein besteht und auf der andern Seite irgend eine andre Person oder eine der gegebenen Verbindungen unter den übrigen bereits ausgestorben ist.

Würde also gefragt, wie lange leben in einer anfänglichen Verbindung unter A B C D F, die beiden Personen A B zusammen, nachdem irgend eine der andern gestorben ist, so wäre, da für jedes xte Jahr die Anzahl derer Vereine unter C, D und F, wovon irgend eine Person gestorben, mit C D F dividirt, $= 1 - \frac{\overset{x}{\overline{C}}\ \overset{x}{\overline{D}}\ \overset{x}{\overline{F}}}{C\ D\ F}$ ist (§. 199), für dieses xte Jahr der Quotient für die Zahl derer Vereine, wovon A und B leben, aber irgend eine der andern Personen gestorben, $= \frac{\overset{x}{\overline{A}}\ \overset{x}{\overline{B}}}{A\ B}\left(1 - \frac{\overset{x}{\overline{C}}\ \overset{x}{\overline{D}}\ \overset{x}{\overline{F}}}{C\ D\ F}\right)$. Folglich wird das gesuchte Ueberleben $= \frac{\int(\overset{x}{\overline{A}}\ \overset{x}{\overline{B}})}{A\ B} - \frac{\int(\overset{x}{\overline{A}}\ \overset{x}{\overline{B}}\ \overset{x}{\overline{C}}\ \overset{x}{\overline{D}}\ \overset{x}{\overline{F}})}{A\ B\ C\ D\ F} = E\,\overline{a\,b\,c} - E\,\overline{a\,b\,c\,d\,f}$.

Würde gefragt, wie lange A B zusammenleben, nachdem irgend zwey der übrigen Personen abgegangen sind, so müfste man zusammenlegen die Zeit, welche A und B in Verbindung leben, nach-

dem je zwey einzelne Personen gestorben, und die Zeit, welche A und B zusammenleben, nachdem alle drey Personen gestorben sind. Folglich hätte man dieses Ueberleben $= \frac{\int A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} (D-D^{\overline{x}})(F-F^{\overline{x}})}{A\ B\ C\ D\ F}$

$$+ \frac{\int A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} D^{\overline{x}} (C - C^{\overline{x}})\ (F - F^{\overline{x}})}{A\ B\ C\ D\ F}$$

$$+ \frac{\int A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} F^{\overline{x}} (C - C^{\overline{x}})\ (D - D^{\overline{x}})}{A\ B\ F\ C\ D}$$

$$+ \frac{\int A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} (C - C^{\overline{x}})\ (D - D^{\overline{x}})\ (F - F^{\overline{x}})}{A\ B\ C\ D\ F}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & E\,\overline{abc} - E\,\overline{abcd} + E\,\overline{abcdf} \\
& - E\,\overline{abcf} \\
& + E\,\overline{abd} - E\,\overline{abdc} + E\,\overline{abcdf} \\
& - E\,\overline{abdf} \\
& + E\,\overline{abf} - E\,\overline{abfc} + E\,\overline{abcdf} \\
& - E\,\overline{abfd} \\
+ E\,\overline{ab} & - E\,\overline{abc} + E\,\overline{abcd} - E\,\overline{abcdf} \\
& - E\,\overline{abd} + E\,\overline{abcf} \\
& - E\,\overline{abf} + E\,\overline{abdf}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= E\,\overline{ab} \quad & - E\,\overline{abcd} + 2\,E\,\overline{abcdf}. \\
& - E\,\overline{abcf} \\
& - E\,\overline{abdf}
\end{aligned}$$

Da Fragen wegen dieses disjunctiven Ueberle-

bens nur selten vorkommen, so halte ich es nicht für nöthig, ein allgemeines Gesetz dafür zu suchen. Nur bemerke ich noch, dafs, wenn nach dem Ueberleben irgend eines Vereins von $\overline{m - u}$ Personen vom Alter a, b, c .. f, nachdem irgend *eine* der übrigen mitverbundenen Personen vom Alter g, h .. k abgegangen ist, gefragt wird, dies Ueberleben jedesmal ist $= E\,\overline{abc..f} - E\,\overline{abc..fgh..k}$.

Anm. Manche Fragen, das disjunctive Ueberleben betreffend, gehören unmittelbar in das Kapitel vom längsten Leben und der längsten Verbindung. Wenn nämlich bestimmt werden soll, wie lange leben in einer anfänglichen Verbindung von m Personen A B zusammen, nachdem *eine einzige* der übrigen Personen gestorben, so heifst das, wie lange währt in einer anfänglichen Verbindung nach m das Ueberleben der längsten Verbindung zu $\overline{m - 1}$, worin A und B begriffen sind. Wenn aber gefragt würde, wie lange leben, bey einer anfänglichen Verbindung nach m, A B zusammen, nachdem *irgend eine* der übrigen Personen gestorben ist, so gehören hieher auch diejenigen Fälle, wo unter den übrigen Personen 2, 3 etc. verstorben sind. Will man also diese Frage nach den Sätzen vom längsten Leben etc. beantworten, so mufs man nicht nur das Ueberleben der längsten Verbindung zu $\overline{m - 1}$, worin A B enthalten sind, sondern auch der längsten Verbindung zu $\overline{m - 2}$, $\overline{m - 3}$ etc, worin A B vorkommen, zusammennehmen.

§. 225.

Wenn das *zwiefache Ueberleben* gesucht wird, so soll bestimmt werden entweder wie lange lebt

z. B. in einer Verbindung von 3 Personen A von der Zeit an, da B nach C verstorben ist, oder auch, wie lange lebt A, nachdem B überlebt hat C, in welchem letztern Fall von dem Tode des C angerechnet wird, und B gestorben seyn oder auch noch leben kann. (S. §. 217).

Im ersten Falle ist das Ueberleben von A für irgend ein ntes Jahr allein $=$

$$\frac{A^{\overline{n}} \int . \triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})}{A\ B\ C},$$

wo in $A^{\overline{n}}$ die Summe aller Producte aus den zu den vorhergehenden Jahren gehörenden Decrementen von B in die zu jedem Jahre gehörige Anzahl der verstorbenen C, d. h. die Summe der Producte von $\triangle B\ (C - C^{1})$ an bis zum Product $\triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})$, multiplicirt werden mufs. Das gesuchte Ueberleben bis zum Ablauf des nten Jahrs wird also $=$

$$\frac{\int [\, A^{\overline{n}} \int \triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})\,]}{A\ B\ C},$$

und, wenn x die Altersergänzung von A ist, für diese ganze Zeit $=$

$$\frac{\int [A^{\overline{x}} \int \triangle B^{\overline{x-1}} (C - C^{\overline{x}})\,]}{A\ B\ C}.$$

Wenn y die Altersergänzung von B und z die von C ist, auch y sowohl als z kleiner als x sind, so wird, sobald n bis z zugenommen hat, $C - C^{\overline{n}} = C$, wie grofs auch n werden mag; ist also

$y > z$, so ist $\triangle B^{\overline{z-1}} (C - C^{\overline{z}}) = \triangle B^{\overline{z-1}}.C$. Wächst ferner n über z hinaus, so ist, so lange n noch nicht y erreicht hat, in dem Producte $\triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})$ zwar der erste Factor noch veränderlich, der zweite aber unveränderlich, nämlich $= C$. Wenn aber n weiter über y wächst, so ist $\triangle B^{\overline{n-1}}$, und also auch $\triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})$, $= 0$; folglich kann dann auch in $A^{\overline{n}} \int . \triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})$ das Product $\int \triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})$ nicht weiter zunehmen, wie sehr auch n wächst, sondern es bleibt dieses Product $\int \triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})$ unveränderlich $= \int \triangle B^{\overline{z-1}} (C - C^{\overline{z}}) + (\triangle B^{\overline{z}} + \triangle B^{\overline{z+1}} + .. + \triangle B^{\overline{y}}) C$, und wenn $n = y + m$, so wird dann $A^{\overline{n}} \int \triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}}) = A^{\overline{y+m}} \int . \triangle B^{\overline{z-1}} (C - C^{\overline{z}}) + A^{\overline{y+m}} (\triangle B^{\overline{z}} + \triangle B^{\overline{z+1}} + .. + \triangle B^{\overline{y}}) C$.

Wenn *im zweiten Falle* nach dem Ueberleben von A gefragt wird von der Zeit an, da C vor B verstorben, so ist dasselbe für ein unbestimmtes ntes Jahr $= \frac{A^{\overline{n}} \int B^{\overline{n}} \triangle C^{\overline{n-1}}}{A B C}$, wo in $A^{\overline{n}}$

die Summe aller Producte aus der zu jedem Jahre gehörigen Zahl der Lebenden von B in das zu dem nächstvorhergehenden Jahre gehörige Decrement von C multiplicirt werden mufs. Danach wird also das Ueberleben bis zum Ablauf des nten Jahrs

$= \frac{\int [A^{n} \int B^{n} \Delta C^{n-1}]}{A\ B\ C}$, und für die ganze Dauer des Lebens von A, wenn x die dazu gehörige Altersergänzung bezeichnet, $=$

$\frac{\int [A^{x} \int B^{x} \Delta C^{x-1}]}{A\ B\ C}$. Wenn wieder x, y, und z die zu A, B und C gehörigen Altersergänzungen bedeuten und x gröfser als y und z, so hat $\int B^{n} \Delta C^{n-1}$ seine Gränze erreicht, wenn n der kleinsten Altersergänzung gleich wird, da dann entweder B^{n} oder $\Delta C^{n} = 0$ wird; ist also z die kleinste Altersergänzung, so bleibt dann $\int B^{z} \Delta C^{z-1}$ für die folgenden Glieder unverändert, und wenn $x = z + m$ ist, so ist $A^{x} \int B^{x} \Delta C^{x-1} = A^{z+m} \int B^{z} \Delta C^{z-1}$.

Anm. Theoretisch betrachtet hätte in der zuerst im §. angeführten Formel anstatt $\int \Delta B^{n-1} (C - C^{n})$ gesetzt werden sollen $\int \Delta B^{n-1} (C - C^{n-1})$; aus dem im §.

209 Anm. angeführten practischen Grunde habe ich aber C^{n} anstatt C^{n-1} gesetzt.

§. 226.

Wenn nun zuerst das *Ueberleben von A* gesucht wird *nach dem Tode derer C, die vor B sterben*, so hat man dafselbe nach der Hypothese des *gleichmäfsigen Absterbens*

1) für drey Personen *von gleichem Alter*, wozu die Ergänzung α gehört, $=$
$\int \frac{(\alpha - x)\ \int (\alpha - x)\ dx}{\alpha\ \alpha^2}\ dx$. Nun ist
$\frac{\int (\alpha - x)\ dx}{\alpha^2} = \frac{\int dx}{\alpha} - \frac{\int x\, dx}{\alpha^2} =$
$\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\,\alpha^2}$, also wird $\int \frac{(\alpha - x)\int (\alpha - x)\, dx}{\alpha\ \alpha^2}\ dx$
$= \int \frac{(\alpha - x)}{\alpha}\ (\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\ \alpha^2})\ dx = \int \frac{x\, dx}{\alpha}$
$- \int \frac{x^2\, dx}{2\ \alpha^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\alpha^2} + \int \frac{x^3\, dx}{2\ \alpha^3} =$
$\frac{x^2}{2\,\alpha} - \frac{x^3}{6\ \alpha^2} - \frac{x^3}{3\ \alpha^2} + \frac{x^4}{8\ \alpha^3}$. Setzt man $x =$
α, so erhält man den Werth $= \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{6} -$
$\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{8} = \frac{\alpha}{8}$. (Wenn man hinzunimmt das Ueberleben von A über diejenigen B, die vor

C sterben, so ist beides zusammen $= \frac{\alpha}{4}$, und das ähnliche Ueberleben für alle drey Personen wird $= \frac{3\alpha}{4}$. Da hierin aber die Zeit, wo zwey Personen zusammen nach dem Tode der dritten leben, oder $\frac{\alpha}{4}$, zweimal enthalten ist, so wird die Zeit des Ueberlebens aller Einzelnen nach dem Tode der zuerststerbenden Person $= \frac{\alpha}{2}$. Setzt man hiezu noch die Verbindungsdauer aller drey Personen, und die Zeit wo alle drey Personen ausgestorben sind, jede $= \frac{\alpha}{4}$, so erhält man die Summe $= \alpha$).

2) Sind die Personen *von ungleichem Alter*, wozu die Ergänzungen α, β und γ gehören mögen, so ist das gesuchte Ueberleben von A während der kleinsten Altersergänzung $= \int \frac{(\alpha - x) f(\beta - x) dx}{\alpha \beta \gamma} dx$.

Da nun $\frac{\int (\beta - x) dx}{\beta \gamma} = \frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\beta\gamma}$,

so hat man $\int \frac{(\alpha - x) \int (\beta - x) dx}{\alpha \beta \gamma} dx =$

$\int \frac{(\alpha - x)}{\alpha} \left(\frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\beta\gamma}\right) dx = \frac{x^2}{2\gamma} - \frac{x^3}{6\beta\gamma} - \frac{x^3}{3\alpha\gamma} + \frac{x^4}{8\alpha\beta\gamma}$.

Ist also *A die älteste Person*, so mufs $x = \alpha$ gesetzt werden, und der Werth wird dann $=$

$$\frac{\alpha^2}{2\gamma} - \frac{\alpha^3}{6\beta\gamma} - \frac{\alpha^3}{3\cdot\alpha\gamma} + \frac{\alpha^4}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2}{6\gamma} - \frac{\alpha^3}{24\beta\gamma}.$$

Ist aber *A die jüngste Person* und B älter als C, so ist das Ueberleben von A nach dem Tode derer C, die vor B sterben, erstlich *während der Zeit* $\beta = \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{\beta^3}{6\beta\gamma} - \frac{\beta^3}{3\alpha\gamma} + \frac{\beta^4}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{\beta^2}{3\gamma} - \frac{5\beta^3}{24\alpha\gamma}$. Ferner ist nach Ablauf der Zeit β die Altersergänzung und Anzahl der $A = \alpha - \beta$, und von Ablauf der Zeit β an bis zu Ende der Zeit α die mittlere Lebensdauer der A, auf ihre anfängliche Anzahl reducirt, $= \frac{\alpha-\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Da nun $\frac{\int(\beta - x)\,dx}{\beta\gamma}$, $= \frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\beta\gamma}$, oder, $\beta = x$ gesetzt, $\frac{\beta}{\gamma} - \frac{\beta^2}{2\beta\gamma} = \frac{\beta}{2\gamma}$, die Wahrscheinlichkeit des gesammten Ueberlebens von B über C ausdruckt, so ist *während der angegebenen Zeit* das Ueberleben von A über die vor B verstorbenen $C = \frac{\beta}{2\gamma} \cdot \frac{(\alpha-\beta)^2}{2\alpha} = \frac{\alpha\beta}{4\gamma} - \frac{\beta^2}{2\gamma} + \frac{\beta^3}{4\alpha\gamma}$. Das gesuchte Ueberleben von A während der ganzen Zeit α wird also =

$$\frac{\beta^2}{3\gamma} - \frac{5\beta^3}{24\alpha\gamma} + \frac{\alpha\beta}{4\gamma} - \frac{\beta^2}{2\gamma} + \frac{\beta^3}{4\alpha\gamma} =$$

$$\frac{\alpha\beta}{4\gamma} - \frac{\beta^2}{6\gamma} + \frac{\beta^3}{24\alpha\gamma}.$$

Ist wieder A die jüngste Person, *C aber älter als B*, so mufs in der obigen Formel, für die Zeit γ, $x = \gamma$ gesetzt werden, und man hat das Ueberleben von A während dieser Zeit $=$

$$\frac{\gamma^2}{2\gamma} - \frac{\gamma^3}{6\beta\gamma} - \frac{\gamma^3}{3\alpha\gamma} + \frac{\gamma^4}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}$$

$$- \frac{\gamma^2}{3\alpha} + \frac{\gamma^3}{8\alpha\beta}.$$ Nach Ablauf der Zeit γ ist die Altersergänzung und Anzahl der $A = \alpha - \gamma$, und die mittlere Lebensdauer derselben, auf ihre anfängliche Zahl reducirt, von Ablauf der Zeit γ bis zu Ende der Zeit $\alpha = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - \gamma}{2}$. Da nun die Wahrscheinlichkeit des gesammten Ueberlebens von B über $C = \frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\beta\gamma}$, oder $x = \gamma$ gesetzt, $= 1 - \frac{\gamma}{2\beta}$ ist, so wird das Ueberleben von A während der angegebenen Zeit $= (1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \frac{(\alpha - \gamma)^2}{2\alpha} = \frac{\alpha}{2} - \gamma +$

$$\frac{\gamma^2}{2\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{4\beta} + \frac{\gamma^2}{2\beta} - \frac{\gamma^3}{4\alpha\beta}.$$ Wenn man beide gefundene Theile zusammennimmt, so hat man das gesammte Ueberleben von A für die-

sen Fall $= \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{6\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{4\beta} + \frac{\gamma^2}{3\beta} - \frac{\gamma^3}{8\alpha\beta}$.

§. 227.

Sucht man das Ueberleben von A von der Zeit an, da C vor B verstorben ist, *nach jeder beliebigen Sterbensordnung*, so ist der Werth für irgend ein ntes Jahr insbesondre $=$

$\frac{A^{\overline{n}} \int B^{\overline{n}} \triangle C^{\overline{n-1}}}{A \quad B \quad C^{\overline{\quad}}}$, wo in $A^{\overline{n}}$ die Summe der Producte der Zahlen der lebenden B für jedes verflofsene Jahr in das zu dem nächstvorhergehenden Jahre gehörige Dscrement von C, d. i. $B^{1} \triangle C^{0} + B^{2} \triangle C^{1} + .. + B^{\overline{n}} \triangle C^{\overline{n-1}}$, multiplicirt werden mufs, und das gesammte Ueberleben bis zum Ablauf des xten Jahrs $=$

$\frac{\int [A^{\overline{x}} \int B^{\overline{x}} \triangle C^{\overline{x-1}}]}{A \quad B \quad C}$. Nun ist, wenn y die kleinste Altersergänzung für B oder C ist,

$$\int [A^{\overline{x}} \int B^{\overline{x}} \triangle C^{\overline{x-1}}] =$$
$$A^{1} . B^{1} \triangle C^{0}$$
$$+ A^{2} (B^{1} \triangle C^{0} + B^{2} \triangle C^{1})$$
$$+ A^{3} (B^{1} \triangle C^{0} + B^{2} \triangle C^{1} + B^{3} \triangle C^{2})$$
$$+ ..$$
$$+ A^{\overline{x}} (B^{1} \triangle C^{0} + B^{2} \triangle C^{1} + B^{3} \triangle C^{2} + ..).$$

Folglich wird der gesuchte Werth $=$

$\frac{1}{A\,B\,C}$ ($B^{1}\,\Delta C\,\int A'^{1} + B^{2}\,\Delta C^{1}\int A'^{2} + B^{1}\,\Delta C^{2}\int A'^{1}$ $+ \ldots + B^{\overline{y}}\,\Delta\,C^{\overline{y-1}}\,\int A^{\overline{,y}}$), wo die Summen von A mit dem bezeichneten Gliede anfangen und bis zur Altersergänzung von A fortgehen.

Sonst kann man auch noch $\frac{\int[A^{\overline{n}}\int B^{\overline{n}}\Delta C^{\overline{n-1}}]}{A\,B\,C}$ in zwey Theile zerlegen. Wenn nämlich y die kleinste Altersergänzung unter B und C ist, so hat man das gesuchte Ueberleben von A bis zu Ablauf der Zeit $y = \frac{\int[A^{\overline{y}}\int B^{\overline{y}}\Delta C^{\overline{y-1}}]}{A\,B\,C}$.

Von dieser Zeit an kömmt noch hinzu die mittlere Lebensdauer derer A, welche bis dahin die vor B verstorbenen C überlebt haben; da nun die mittlere Lebensdauer der A, auf ihre anfängliche Zahl reducirt, von Ablauf der Zeit y an, $=$ $\frac{A^{\overline{y}}}{A}\,E\,\overline{a+y}$, und die Wahrscheinlichkeit, dafs bis dahin C vor B gestorben sey, $\frac{\int B^{\overline{y}}\,\Delta\,C^{\overline{y-1}}}{B\,C}$ ist, so hat man den hinzuzulegenden Theil $= \frac{\int B^{\overline{y}}\,\Delta\,C^{\overline{y-1}}}{B\,C} \cdot \frac{A^{\overline{y}}}{A}\,E\,\overline{a+y}$.

Sollte B vor C sterben, so wäre das gesuchte Ueberleben von $A = \frac{\int [A^{\overline{y}} \int C^{\overline{y}} \Delta B^{\overline{y-1}}]}{A \quad B \quad C}$

$$+ \frac{\int C^{\overline{y}} \Delta B^{\overline{y-1}}}{B \quad C} \cdot \frac{A^{\overline{y}}}{A} \cdot E^{\overline{a+y}}.$$

Wenn man die Wahrscheinlichkeit, dafs bis zu Ausgang des nten Jahrs C vor B gestorben sey, mit $\varphi^{\overline{n}}$, und dafs B vor C gestorben, mit $\xi^{\overline{n}}$ bezeichnet, so kann man das Ueberleben von A bis zu Ablauf des nten Jahrs in dem einen Falle durch $\frac{\int \varphi^{\overline{n}} A^{\overline{n}}}{A}$, in dem andern Falle aber durch $\frac{\int \xi^{\overline{n}} A^{\overline{n}}}{A}$ ausdrucken.

§. 227. b.

Wollte man nicht blofs auf ganze Jahre rechnen, sondern den Werth des im vorigen §. bestimmten Ueberlebens vollständig haben, so wäre für das nte Jahr die vollständige Dauer des gesuchten Ueberlebens aller $A = A^{\overline{n}} (\int B^{\overline{n}} \Delta C^{\overline{n-1}} + \frac{1}{2} \int \Delta B^{\overline{n-1}} \Delta C^{\overline{n-1}}) + \Delta A^{\overline{n-1}} (\int B^{\overline{n-1}} \Delta C^{\overline{n-2}} + \frac{1}{2} \int \Delta B^{\overline{n-2}} \Delta C^{\overline{n-2}}) + \int [(1-x) \Delta A^{\overline{n-1}} dx \int (B^{\overline{n}}$

$+ (1 - x)\ \Delta B^{\overline{\overline{-1}}})\ \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}\ dx]$. Der letzte Theil ist $= \int[(1 - x)\ \Delta A^{\overline{\overline{n-1}}}\ (x\ B^{\overline{n}}\ \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}} + (x - \frac{x^2}{2})\ \Delta B^{\overline{\overline{n-1}}}\ \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}})\ dx]$ oder, für $x = 1$ genommen, $= \frac{1}{6}\ \Delta A^{\overline{\overline{n-1}}}\ B^{\overline{n}} . \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}} + \frac{1}{8}\ \Delta A^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta B^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}$; man erhält also alle Theile, worin $\Delta A^{\overline{\overline{n-1}}}$ multiplicirt ist, $=$

$$\Delta A^{\overline{\overline{n-1}}}\ (\int B^{\overline{n}}\ \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}} + \tfrac{1}{2} \int \Delta B^{\overline{\overline{n-1}}}\ \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}) - \tfrac{5}{6} \Delta A^{\overline{\overline{n-1}}} \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}} . B^{\overline{n}} - \tfrac{3}{8} \Delta A^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta B^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}.$$

Hiernach ist der vollständige Werth aller Jahre $=$

$$\frac{\int[A^{\overline{\overline{n-1}}} \int B^{\overline{n}}\ \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}]}{A\ B\ C} + \tfrac{1}{2} \frac{\int[A^{\overline{\overline{n-1}}} \int \Delta B^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}]}{A\ B\ C} - \tfrac{5}{6} \frac{\int[\Delta A^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}} . B^{\overline{n}}]}{A\ B\ C} - \tfrac{3}{8} \frac{\int[\Delta A^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta B^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}]}{A\ B\ C}$$

(oder auch

$$= \frac{\int[A^{\overline{\overline{n-1}}} \int B^{\overline{\overline{n-1}}}\ \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}]}{A\ B\ C} + \tfrac{1}{2} \frac{\int[A^{\overline{\overline{n-1}}} \int \Delta B^{\overline{\overline{n-1}}} . \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}]}{A\ B\ C} - \tfrac{5}{6} \frac{\int[\Delta A^{\overline{\overline{n-1}}} B^{\overline{\overline{n-1}}} \Delta C^{\overline{\overline{n-1}}}]}{A\ B\ C} +$$

$\frac{11}{24}\frac{\int[\Delta A^{\overline{n-1}} \cdot \Delta B^{\overline{n-1}} \cdot \Delta C^{\overline{n-1}}]}{A\ B\ C}$). Die beiden Producte, worin $\frac{\int A^{\overline{n-1}}}{A}$ multiplicirt ist, machen die vollständige Wahrscheinlichkeit aus, dafs am Ende des nten Jahrs B überlebt habe C; wenn man also bey der Berechnung diese vollständige Wahrscheinlichkeit zum Grunde legt, so sind am Ende noch die angeführten zwey letzten Theile als Correction hinzuzufügen. Der erste ist $=-\frac{5}{9}[\frac{A^{\overline{-1}}\ C^{\overline{-1}}}{A\ C} E\overline{(a-1)\ b\ (c-1)} - \frac{A^{\overline{-1}}}{A} E\overline{(a-1)\,b\,c} - \frac{C^{\overline{-1}}}{C} E\overline{a\ b\ (c-1)} + E\overline{a\ b\ c}.]$ Der letzte Theil kann, als eine Summe von Producten dreier durch die Grundzahlen dividirten Decremente, wohl weggelafsen werden.

§. 228.

Wird zweitens das Ueberleben von A über B gesucht, wenn die letztere Person nach dem Tode von C verstorben ist, so hat man dafselbe nach der Hypothese *des gleichmäfsigen Absterbens*

1) für drey Personen von gleichem Alter, wozu die Ergänzung α gehört, $=\int\frac{(\alpha-x)\int x\,dx}{\alpha\quad\alpha^2}\,dx.$

Nun ist $\frac{\int x\,dx}{\alpha^2} = \frac{x^2}{2\alpha^2}$; folglich wird das gesuchte Ueberleben $= \int \frac{(\alpha - x)\,x^2}{2\alpha^3}\,dx =$

$\frac{\int x^2\,dx}{2\alpha^2} - \frac{\int x^3\,dx}{2\alpha^3} = \frac{x^3}{6\alpha^2} - \frac{x^4}{8\alpha^3}$,

und, wenn man $x = \alpha$ setzt, $= \frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha}{8} =$

$\frac{\alpha}{24}$. (Nimmt man hiezu das Ueberleben von A über C, wenn letztere Person nach B verstorben, welches ebenfalls $= \frac{\alpha}{24}$ ist, so wird das Ueberleben von A über die beiden andern Mitverbundenen $= \frac{\alpha}{12}$, und folglich das gleichnamige Ueberleben der drey einzelnen Personen über die Verbindung zu $2 = \frac{\alpha}{4}$, wie es seyn mufs).

2) Ist das Alter der Personen A, B und C ungleich, A aber die älteste Person, so hat man wieder in einer einzigen Berechnung das Ueberleben von A, wenn B nach C gestorben, $= \int \frac{(\alpha - x)\int x\,dx}{\alpha\,\beta\,\gamma}\,dx$.

Nun ist $\frac{\int x\,dx}{\beta\,\gamma} = \frac{x^2}{2\beta\gamma}$; folglich wird das gesuchte Ueberleben $= \frac{\int (\alpha - x)\,x^2\,dx}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma} =$

$\frac{\int x^2\,dx}{2\,\beta\gamma} - \frac{\int x^3\,dx}{2\,\alpha\beta\gamma} = \frac{x^3}{6\,\beta\gamma} - \frac{x^4}{8\,\alpha\beta\gamma}$.

und, wenn $x = \alpha$ gesetzt wird, $= \frac{\alpha^3}{6\beta\gamma} - \frac{\alpha^3}{8\beta\gamma}$ $= \frac{\alpha^3}{24\beta\gamma}$. Eben das ist die Dauer des Ueberlebens von A über C, nachdem B vorher verstorben, die Altersergänzungen von B und C mögen gleich oder ungleich seyn, wenn nur keine derselben kleiner als α ist.

3) Ist *A jünger als die beiden andern Personen, diese aber von gleichem Alter b*, so findet man den vollständigen Werth des Ueberlebens von A über eine Person, wenn sie nach der andern verstorben, durch zwey Berechnungen. Es ist nämlich dann der obige Ausdruck $\frac{x^3}{6\beta\gamma} - \frac{x^4}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{x^3}{6\beta^2} - \frac{x^4}{8\alpha\beta^2}$, und folglich, wenn hierin $x = \beta$ gesetzt wird, das Ueberleben von A bis zum Ablauf der Zeit $\beta = \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{8\alpha}$.

Für die zweyte Periode, wo das Absterben der B und C nicht mehr zunimmt, ist in $\int \frac{(\alpha - x)\int x dx}{\alpha \beta^2} dx$ der Factor $\frac{\int x dx}{\beta^2}$ oder $\frac{x^2}{2\beta^2}$, da hier $x = \beta$ genommen werden muſs, $= \frac{1}{2}$, d. h. die Hälfte der B ist nach C verstorben; ferner ist die Anzahl und die Altersergänzung der Personen A zu Anfang dieser Periode $= \alpha - \beta$, oder der Kürze wegen $= \eta$. Folglich wird die mittlere Zeit des Ueberlebens von A

über die nach C verstorbenen B während dieser Periode $= \frac{1}{2} \frac{\int (\eta - x)\, dx}{\alpha} = \frac{\int \eta\, dx}{2\alpha} - \frac{\int x\, dx}{2\alpha} = \frac{\eta x}{2\alpha} - \frac{x^2}{4\alpha}$, und $x = \eta$ genommen, $= \frac{\eta^2}{2\alpha} - \frac{\eta^2}{4\alpha} = \frac{\eta^2}{4\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2}$

$= \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4\alpha}$.

Beide Theile zusammengenommen geben also das gesammte Ueberleben von A über die nach C verstorbenen B $= \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4\alpha} + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{8\alpha} = \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{3} + \frac{\beta^2}{8\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$ d. h., gleich der Hälfte des gesammten Ueberlebens von A über beide Personen.

Wenn 4) *A die jüngste Person, B aber jünger als C*, also $\beta > \gamma$, so ist zuerst das *Ueberleben von A über die nach B verstorbenen C* bis zum Ablauf der Zeit $\gamma = \frac{\int (\alpha - x)\, x^2\, dx}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{x^3}{6\beta\gamma} - \frac{x^4}{8\alpha\beta\gamma}$, und, $x = \gamma$ genommen, $= \frac{\gamma}{6\beta} - \frac{\gamma^2}{8\alpha\beta} = \frac{\gamma}{2\beta} \left(\frac{\gamma}{3} - \frac{\gamma^2}{4\alpha}\right)$.

Während der ganzen übrigen Periode, d. i. vom Ablauf der Zeit γ bis zum Ende der Zeit α, ist, da (dx auf γ bezogen) $\int \frac{x\, dx}{\beta\gamma}$ nicht mehr

zunehmen kann, dieser Factor $= \frac{\gamma}{2\beta}$; ferner ist im Anfang dieser Periode die Altersergänzung und Anzahl der Personen $A = \alpha - \gamma$ oder der Kürze wegen $= \varepsilon$. Folglich wird das Ueberleben von A über die nach B verstorbenen C während dieser Zeit $= \frac{\gamma}{2\beta} \frac{\int (\varepsilon - x)\, dx}{\alpha} = \frac{\gamma}{2\beta} (\frac{\varepsilon x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha})$, und $x = \varepsilon$ gesetzt, $= \frac{\gamma \varepsilon^2}{4\alpha\beta} = \frac{\gamma}{2\beta} \cdot \frac{\alpha - \gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{\alpha\gamma}{4\beta} - \frac{\gamma^2}{2\beta} + \frac{\gamma^3}{4\alpha\beta}$.

Beide Theile für das Ueberleben nach C zusammengenommen sind also $= \frac{\alpha\gamma}{4\beta} - \frac{\gamma^2}{2\beta} + \frac{\gamma^3}{4\alpha\beta} + \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{\gamma^3}{8\alpha\beta} = \frac{\alpha\gamma}{4\beta} - \frac{\gamma^2}{3\beta} + \frac{\gamma^3}{8\alpha\beta} = \frac{\gamma}{2\beta} (\frac{\alpha}{2} - \frac{2\gamma}{3} + \frac{\gamma^2}{4\alpha})$.

Ferner ist *das Ueberleben von A über die nach C verstorbenen B* für die Zeit γ wieder wie vorher $= \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{\gamma^3}{8\alpha\beta}$.

In der zweiten Periode, nämlich von Ablauf der Zeit γ an bis zum Verlauf der Zeit β, ist die jedesmalige Anzahl der $A = \alpha - \gamma - x$ oder der Kürze wegen $= \varepsilon - x$, wo x bis zum Werth von $\beta - \gamma$ steigt, und es ist für jedes x der Factor

$\frac{\varepsilon - x}{\alpha}$ zu multipliciren, erstens wegen der im Anfange dieses Zeitraums nach C schon verstorbenen B mit $\frac{\gamma}{2\beta}$, zweitens, weil nach dem Tode aller C das Absterben der B fortwährt, mit dem Werthe von $\int \frac{dx}{\beta} = \frac{x}{\beta}$. Folglich ist für diesen Zeitraum das Ueberleben von $A = \frac{\gamma}{2\beta} \int \frac{(\varepsilon - x)\, dx}{\alpha}$ $+ \frac{\int (\varepsilon - x)\, x\, dx}{\alpha\beta} = \frac{\gamma\varepsilon x}{2\alpha\beta} - \frac{\gamma x^2}{4\alpha\beta} + \frac{\varepsilon x^2}{2\alpha\beta} - \frac{x^3}{3\alpha\beta}$, oder wenn man $x = \beta - \gamma$ und $\alpha - \gamma$ anstatt ε setzt, $= \frac{\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{2\alpha\beta}$, $- \frac{\gamma(\beta-\gamma)^2}{4\alpha\beta} + \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^2}{2\alpha\beta} - \frac{(\beta-\gamma)^3}{3\alpha\beta} = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta\gamma}{4\alpha} - \frac{\beta^2}{3\alpha} + \frac{\gamma^3}{12\alpha\beta}$.

In der dritten Periode ist die jedesmalige Anzahl der $A = \alpha - \beta - x$ oder $= \eta - x$, und für jedes x ist der Factor $\frac{\eta - x}{\alpha}$ zu multipliciren mit der Wahrscheinlichkeit, dafs B nach C verstorben, folglich wegen der ersten Periode mit $\frac{\gamma}{2\beta}$, und wegen der zweiten, (wo in $\frac{\int dx}{\beta}$ oder $\frac{x}{\beta}$ für x

gesetzt werden mufs $\beta - \gamma$) mit $\frac{\beta - \gamma}{\beta}$. Also ist das Ueberleben von A für diese Periode

$= (1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \frac{\int (\eta - x)\, dx}{\alpha} = (1 - \frac{\gamma}{2\beta})(\frac{\eta x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha})$, oder $x = \eta$ genommen, $= (1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \frac{\eta^2}{2\alpha}$

$= (1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta^2}{2\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{4\beta} - \frac{\beta\gamma}{4\alpha}$.

Alle drey Theile zusammen geben das gesammte Ueberleben von A über B $= \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta^2}{2\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{4\beta} - \frac{\beta\gamma}{4\alpha} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta^2}{3\alpha} + \frac{\beta\gamma}{4\alpha} + \frac{\gamma^3}{12\alpha\beta} + \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{\gamma^3}{8\alpha\beta} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{4\beta} + \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{\gamma^3}{24\alpha\beta}$.

Da nun ferner die Summe des Ueberlebens von A sowohl über die nach B verstorbenen C als über die nach C verstorbenen B $=$

$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} + \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{\alpha\gamma}{4\beta} - \frac{\gamma^3}{24\alpha\beta} - \frac{\gamma^2}{3\beta} + \frac{\alpha\gamma}{4\beta} + \frac{\gamma^3}{8\alpha\beta}$

$= \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} - \frac{\gamma^2}{6\beta} + \frac{\gamma^3}{12\alpha\beta} = Ea - E\,a\overline{b} - E\,\overline{ac} + E\,\overline{abc}$, die Differenz der bei-

den Ueberleben aber $= \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{2\beta} + \frac{\gamma^2}{2\beta} - \frac{\gamma^3}{6\alpha\beta} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} - \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{6\alpha}\right) = \mathrm{E\,a} - \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,b}} - \frac{\gamma}{\beta}(\mathrm{Ea} - \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,c}})$ ist, so hat man allgemein nach der Hypothese das Ueberleben von A, wenn dies die jüngste Person ist, über eine der beiden Personen, welche nach der andern stirbt, $= \frac{1}{2}(\mathrm{E\,a} - \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,b}} - \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,c}} + \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,b\,c}}) \pm \frac{1}{2}(\mathrm{Ea} - \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,b}}) \mp \frac{\gamma}{2\beta}(\mathrm{E\,a} - \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,c}})$, wo die obern Zeichen für das Ueberleben über B die jüngere Person und die untern Zeichen für das Ueberleben über die ältere Person C gelten. Sind B und C gleich alt, so ist $\mathrm{E\,a} - \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,b}} = \frac{\gamma}{\beta}(\mathrm{E\,a} - \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{a\,b}})$.

Anm. Also ist nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens durchgängig *bis zum Ablauf der kleinsten Altersergänzung* das Ueberleben von A über die nach B verstorbenen C gleich dem Ueberleben von A über die nach C verstorbenen B, A mag die älteste oder jüngste Person und B und C mögen gleich oder ungleich von Alter seyn. Wenn daher A die älteste unter den drey Personen oder eben so alt ist als die ältere der beiden andern, so ist das Ueberleben von A das nämliche, es mag B nach C oder C nach B versterben. Zur Aufklärung dieses anscheinenden Paradoxons bemerke ich nur noch, dafs wenn die jüngere Person C vor der ältern B stirbt, freilich der jährliche Abgang der jüngern Personen kleiner, aber die Anzahl der bereits verstorbenen dazu gehörigen Personen B,

als der zweite Factor, für jedes Jahr gröfser sey, als wenn die ältere Person vor der jüngern stirbt.

Wenn aber B und C von ungleichem Alter sind, und zwar B älter als C, A aber jünger als beide ist, so sterben nach dem Ableben aller B, nach und nach auch diejenigen C ab, die bey dem Aufsterben der B noch lebten, und das Ueberleben von A über die nach B verstorbenen C wird gröfser als das Ueberleben über die nach C verstorbenen B.

§. 229.

Wenn *nach irgend einer beliebigen Sterbensordnung* das Ueberleben von A über die nach C verstorbenen B gesucht wird, so hat man, nach der Formel $\frac{\int [A^{\overline{n}} \, \int \triangle B^{\overline{n-1}} \, (C - C^{\overline{n}})]}{A \; B \; C}$, mit der Zahl der lebenden A für jedes Jahr oder mit $A^{\overline{n}}$ die Summe der Producte von $\triangle B \, (C - C^{1}) + \triangle B^{1} \, (C - C^{2}) + .. + \triangle B^{\overline{n-1}} \, (C - C^{\overline{n}})$ zu multipliciren, demnächst alle diese Producte aus $A^{\overline{n}}$ in $\int \triangle B^{\overline{n-1}} \, (C - C^{\overline{n}})$ wieder zu summiren, und die Summe durch A B C zu dividiren. Etwas läfst sich jedoch diese Arbeit abkürzen.

Es ist nämlich *zuerst* $\frac{\int [A^{\overline{n}} \, \int \triangle B^{\overline{n-1}} \, (C - C^{\overline{n}})]}{A \; B \; C}$

$= \frac{\int [A^{\overline{n}} \, \int \triangle B^{\overline{n-1}}]}{A \; B} - \frac{\int [A^{\overline{n}} \, \int \triangle B^{\overline{n-1}} . C^{\overline{n}}]}{A \; B \; C}$.

Der erste Theil ist, da $\int \Delta B^{\overline{n-1}}$ für jedes nte Jahr $= B - B^{\overline{n}}$ wird, $= \frac{\int A^{\overline{n}}}{A} - \frac{\int A^{\overline{n}} B^{\overline{n}}}{A\ B}$ welches, wenn die Reihen bis zu den Altersergänzungen fortgesetzt werden, $= E\,a - E\,a\,\overline{b}$ ist.

Der zweite Theil oder $\frac{\int [A^{\overline{n}} \int \Delta B^{\overline{n-1}} . C^{\overline{n}}]}{A\ B\ C}$ ist nach §. 227 $= \frac{1}{A\,B\,C}$ $(\Delta B . C^{1} \int A'^{1} + \Delta B^{1} . C^{2} \int A'^{2} + \Delta B^{2} . C^{3} \int A'^{3} + ..)$. Es ist also hienach das gesammte Ueberleben von A über die nach C verstorbenen B $= E\,a - E\,a\,b - \frac{1}{A\,B\,C}$ $(\Delta B\,C^{1} \int A'^{1} + \Delta B^{1}\,C^{2} \int A'^{2} + \Delta B^{2}\,C^{3} \int A'^{3} + ..)$.

Man kann *zweitens* noch auf eine andre Art $\frac{\int A^{\overline{n}} \int \Delta B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})}{A\ B\ C}$ und $\frac{\int A^{\overline{n}} \int \Delta C^{\overline{n-1}} (B - B^{\overline{n}})}{A\ B\ C}$ in Theile zerlegen. Wird nämlich die Altersergänzung der ältsten Person $C = \gamma$ gesetzt, so hat man das Ueberleben von A über die nach C verstorbenen B *bis zum Ablauf der Zeit* $\gamma =$ $\frac{\int [A^{\overline{\gamma}} \int \Delta B^{\overline{\gamma-1}} (C - C^{\overline{\gamma}})]}{A\ B\ C}$, so wie das

Ueberleben über die nach B verstorbenen C =

$$\frac{\int [A^{\overline{\gamma}} \int \Delta C^{\overline{\gamma-1}} (B - B^{\overline{\gamma}})]}{A \quad B \quad C}.$$

Nach Ablauf der Zeit γ kömmt zu dem Ueberleben über C noch hinzu die auf die anfängliche Zahl der A reducirte mittlere Lebensdauer derer A, welche die nach B verstorbenen C überlebt haben, vom Ablauf der Zeit γ an bis zum Ablauf der Altersergänzung von A, die α heifsen mag. Da nun

$$\frac{\int \Delta C^{\overline{\gamma-1}} (B - B^{\overline{\gamma}})}{C \quad B}$$ das Verhältnifs für die Anzahl der bis zum Ablauf der Zeit γ nach B verstorbenen C zu der anfänglichen Zahl der Paare BC ausdruckt, so wird das noch zu bestimmende Ueberleben von A =

$$\frac{\int \Delta C^{\overline{\gamma-1}} (B - B^{\overline{\gamma}})}{B \quad C} \times \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A} \; E_{a + \gamma}.$$

Zu dem Ueberleben von A über B ist hinzuzusetzen erstlich die auf die Anfangszahl reducirte Lebensdauer derer A, welche während der Zeit γ ihre nach C verstorbenen B überlebt haben, vom Ablauf der Zeit γ an bis zur Altersergänzung α, d. h.

$$\frac{\int \Delta B^{\overline{\gamma-1}} (C - C^{\overline{\gamma}})}{B \quad C} \cdot \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A} \; E_{a + \gamma},$$

zweitens das auf eben die anfängliche Anzahl ver-

theilte Ueberleben derer A, welche bey Ablauf der Zeit γ noch mit ihren B verbunden waren, über diese B, wieder von Ablauf der Zeit γ an bis zu Ende der Zeit α, oder $\frac{1}{AB}\,[A^{\overline{\gamma+1}}\,\Delta B^{\overline{\gamma}} + A^{\overline{\gamma+2}}\,(\Delta B^{\overline{\gamma}} + \Delta B^{\overline{\gamma+1}}) + A^{\overline{\gamma+3}}\,(\Delta B^{\overline{\gamma}} + \Delta B^{\overline{\gamma+1}} + \Delta B^{\overline{\gamma+2}}) + ..] = \frac{A^{\overline{\gamma}}\,B^{\overline{\gamma}}}{AB}\,[E^{\overline{a+\gamma}} - E^{\overline{(a+\gamma)\,(b+\gamma)}}]$.

Folglich erhält man das gesammte Ueberleben von A über $C = \frac{\int [A^{\overline{\gamma}}\,\int \Delta C^{\overline{\gamma-1}}\,(B - B^{\overline{\gamma}})]}{ABC}$

$+ \frac{\int \Delta C^{\overline{\gamma-1}}\,(B - B^{\overline{\gamma}})}{BC} \cdot \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A}\,E^{\overline{a+\gamma}}$,

das gesammte Ueberleben von A über B aber $=$

$\frac{\int [A^{\overline{\gamma}}\,\int \Delta B^{\overline{\gamma-1}}\,(C - C^{\overline{\gamma}})]}{ABC} +$

$\frac{\int \Delta B^{\overline{\gamma-1}}\,(C - C^{\overline{\gamma}})}{BC} \cdot \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A}\,E^{\overline{a+\gamma}}$

$+ \frac{A^{\overline{\gamma}}\,B^{\overline{\gamma}}}{AB}\,[E^{\overline{a+\gamma}} - E^{\overline{(a+\gamma)\,(b+\gamma)}}]$.

Die ersten Theile des Ueberlebens über beide Personen zusammengenommen machen das Ueberleben von A über beide Personen während der Zeit

γ aus; die zweiten Theile zusammengenommen machen die mittlere Lebensdauer derer A aus, deren B sowohl als C bey Ablauf der Zeit γ schon gestorben waren, und zwar vom Ablauf der Zeit γ bis zu Ende der Zeit α; der dritte Theil des Ueberlebens über B ist das Ueberleben derer A, welche bey Ablauf der Zeit γ noch mit ihren B verbunden waren, wieder während des vorhin angegebenen Zeitraums. Wenn $b = c$, so ist dieser Theil $= 0$, indem dann $B^{\overline{\gamma}} = 0$ ist, und die übrigen gleichnamigen Theile des Ueberlebens über B und C sind gleich.

Wenn man die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des nten Jahrs B gestorben ist nach C, mit $\varphi^{\overline{n}}$, und die Wahrscheinlichkeit, dafs bis dahin C verstorben ist nach B, mit $\chi^{\overline{n}}$ bezeichnet, so kann man das Ueberleben von A über die nach C verstorbenen B durch $\frac{\int \varphi^{\overline{n}} A^{\overline{n}}}{A}$, und das Ueberleben von A über die nach B verstorbenen C durch $\frac{\int \chi^{\overline{n}} A^{\overline{n}}}{A}$ ausdrucken.

§. 229. b.

Will man bey dem Ausdrucke $Ea - E\,a\,\overline{b} -$ $\frac{\int [A^{\overline{n}} \int \Delta B^{\overline{n-1}} . C^{\overline{n}}]}{A\ B\ C}$ eine Correction anbrin-

gen, so kann man sie für E a und E $\overline{a\,b}$, so wie sie vorher im zweiten und dritten Abschnitt angegeben ist, leicht bestimmen. Der vollständige Werth des dritten Theils, welcher das Ueberleben von A über diejenigen B ausdruckt, bey deren Tode C noch lebt, ist nach dem §. 227. b $= \frac{\overline{\int [A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} . C^{n}]}}{A\,B\,C}$

$+ \frac{1}{2} \frac{\overline{\int [A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}]}}{A\,B\,C} -$

$\frac{1}{6} \frac{\overline{\int \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1} . C^{n}}}{A\,B\,C} -$

$\frac{1}{8} \frac{\overline{\int \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}}}{A\,B\,C}$.

Sollte bey der zweiten Formel des vorigen §. der Werth vollständig berechnet werden, so könnte dies auf folgende Weise geschehen. Die vollständige Anzahl der nach C verstorbenen B bis zum Ablauf des nten Jahrs ist $= \overline{\int \Delta B^{n-1} (C - C^{n-1})}$

$+ \frac{1}{2} \overline{\int \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}}$, oder auch $=$

$\overline{\int \Delta B^{n-1} (C - C^{n})} - \frac{1}{2} \overline{\int \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}}$.

Für das nte Jahr ist also die vollständige Zeit des Lebens derer A, deren mitverbundene B nach C

verstorben sind, $= A^{n} \int \Delta B^{n-1} (C - C^{n}) -$

$\frac{1}{2} A^{n} \int \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1} + \Delta A^{n-1} \int \Delta B^{n-2} (C - C^{n-1})$

$- \frac{1}{2} \Delta A^{n-1} \int \Delta B^{n-2} . \Delta C^{n-2} +$

$\int [(1-x) \Delta A^{n-1} dx . \int \Delta B^{n-1} (C - C^{n} - (1-x) \Delta C^{n-1}) dx].$

Der letzte Theil ist, wenn nach der Integration 1 anstatt x gesetzt wird, $= \frac{1}{6} \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1} (C - C^{n})$ $- \frac{1}{8} \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}$; alle Theile, worin ΔA^{n-1} multiplicirt ist, sind also $=$

$\Delta A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} (C - C^{n}) - \frac{1}{2} \Delta A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}$

$- \frac{5}{6} \Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1} (C - C^{n}) + \frac{3}{8} \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}.$

Hiernach ist der vollständige Werth des Ueberlebens der erwähnten A für das nte Jahr $=$

$A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} (C - C^{n}) - \frac{1}{2} A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}$

$- \frac{5}{6} \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1} (C - C^{n}) + \frac{3}{8} \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1},$

und das mittlere vollständige Ueberleben für alle Jahre $=$

$$\frac{\int [A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} (C - C^{n})]}{A \quad B \quad C}$$

$$- \frac{\int [A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} . \Delta C^{n-1}]}{2 \quad A \quad B \quad C} -$$

$$\frac{5}{6}\,\frac{\int \Delta A^{\overline{n-1}}\ \Delta B^{\overline{n-1}}\ (C - C^{\overline{n}})}{A\ B\ C} +$$

$$\frac{3}{8}\,\frac{\int \Delta A^{\overline{n-1}} \cdot \Delta B^{\overline{n-1}} \cdot \Delta C^{\overline{n-1}}}{A\ B\ C}.$$ Die beiden Factoren, worin $\frac{\int A^{\overline{n-1}}}{A}$ multiplicirt ist, machen die vollständige Wahrscheinlichkeit aus, dafs am Ende des nten Jahrs B gestorben sey nach C; wenn man also bey der Berechnung sofort diese vollständige Wahrscheinlichkeit zum Grunde legt, so hat man am Ende nur noch die beiden andern Theile als Correction hinzuzusetzen. Der erste derselben ist $= -\frac{5}{6}[1 + 2\,E\,\overline{a\,b} -$

$$\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,E\,\overline{(a-1)\,b} - \frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,E\,\overline{a\,(b-1)} -$$

$$\frac{A^{\overline{-1}}\ B^{\overline{-1}}}{A\ B}\,E\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} +$$

$$\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,E\,\overline{(a-1)\,b\,c} + \frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,E\,\overline{a\,(b-1)\,c} -$$

$E\,\overline{a\,b\,c}]$. Der letzte Theil kann, bey seiner Unbeträchtlichkeit, wohl füglich wegfallen.

Anm. 1. Zur richtigen Berechnung des Ueberlebens, so wie es in den §. 225 bis 229 bestimmt ist, bedarf man also der Wahrscheinlichkeiten, dafs in einer gegebenen Zeit B stirbt nach C, oder auch dafs B stirbt vor C, von welchen Wahr-

scheinlichkeiten bereits oben im §. 135 und 136 gehandelt ist. Diese Wahrscheinlichkeiten lafsen sich aber bey einer erfahrungsmäfsigen Sterbensordnung weder für die ganze Lebensdauer noch für eine bestimmte Anzahl von Jahren aus den Grundzahlen B und C oder deren Altersergänzungen β und γ herleiten, sondern müfsen nach den Decrementen aller Jahre berechnet werden. Ich bemerke in dieser Hinsicht noch Folgendes.

1) Schon wenn man das nämliche Fundamentalalter annimmt, ändern sich diese Wahrscheinlichkeiten *für die verschiedenen Jahre* beträchtlich. Es ist z. B., wenn anfänglich B 30 und C 40 Jahre alt ist, zufolge Süfsmilchs Sterbensordnung

nach Verlauf von Jahren	die vollständige Wahrscheinlichkeit,	
	dafs B gestorben nach C	dafs C gestorben nach B
5	0,00319	0,00319
10	0,01473	0,01457
15	0,03530	0,03718
20	0,06903	0,06976
25	0,12039	0,11720
30	0,18555	0,18009
35	0,26856	0,24601
40	0,36650	0,30469
45	0,45751	0,34700
50	0,52821	0,37283
55	0,57351	0,38552
56	0,58014	0,38797
66	0,61203	0,38797

2) Noch mehr weicht diese Wahrscheinlichkeit von dem Verhältnifse der Fundamentalzahlen und der Altersergänzungen ab, wenn sie *auf die ganze Lebensdauer* für mehrere Paare von verschiedener Altersverbindung gesucht wird. So ist z. B. wieder nach Süfsmilchs Mortalitätstabelle für die ganze *Lebensdauer der ältern Person*

bey dem Alter		die vollständige Wahrscheinlichkeit,	
von B	von C	dafs B gestorben nach C	dafs C gestorben nach B
10	85	0,05219	0,03428
20	85	0,07356	0,04457
30	85	0,10250	0,06150
40	85	0,13888	0,08289
50	85	0,20029	0,12971
60	85	0,31176	0,19776
70	85	0,39863	0,31565
80	85	0,43323	0,43164.

Uebrigens erklärt sich die Veränderlichkeit dieser Verhältnifse leicht aus der Verschiedenheit der Decremente in den verschiedenen Altern.

Indefsen ist es doch, wenn man so verfährt, wie im §. 136 gezeigt worden, und einigermafsen darauf eingeübt ist, nur die Arbeit von einigen Stunden, für zwey gegebene Alter die Wahrscheinlichkeit aller Jahre, dafs eine Person vor oder nach der andern gestorben sey, zu finden. Wie man die eine Wahrscheinlichkeit aus der andern herleitet, ist schon ebenfalls §. 135 angegeben. Die zweite Arbeit, nämlich die Multiplication dieser Wahrscheinlichkeiten in die Zahlen der

lebenden A läfst sich mit Hülfe von Multiplicationstabellen wohl in eben so kurzer Zeit bestreiten.

Anm. 2. Ich bin bey diesen letzten Problemen darum so umständlich gewesen, weil sie bisher nicht hinlänglich erörtert zu seyn scheinen. *Tetens* handelt davon nicht unmittelbar; indefsen beruft er sich in seiner Einleitung etc. S. 470, wo er die Ueberlebensrente für A sucht, wenn zuerst C und nachher B gestorben ist, welcher Fall den hier abgehandelten Aufgaben analog ist, auf die vorhergehenden §. §. 19 und 20, (wo die Wahrscheinlichkeit bestimmt ist, dafs zuerst C, dann B und zuletzt A stirbt, imgleichen die Anwartschaft, welche auf diesen Fall bey dem Tode von A bezahlt werden soll, gesucht wird) und sagt, dafs man hier ein ähnliches Verfahren anwenden könne. Die Beweise der §. §. 19 und 20 sind aber theils sehr verwickelt, theils am Ende nicht befriedigend, indem darin wieder die Hypothese zu Hülfe genommen ist. Auch scheint es Tetens zu befremden, dafs bey diesen Rechnungen immer ein Stück übrig bleibt, welches nicht auf die gewöhnlichen Lebensdauern und Leibrenten zurückzuführen ist.

Herr *Brune* nimmt in seiner Berechnung der Lebensrenten und Anwartschaften etc. an, dafs das Ueberleben von A über die nach C gestorbenen B, wenn B die jüngere Person, $= (1 - \frac{\gamma}{2\beta})$ (E a — E $\overline{ab}$ — E $\overline{ac}$ + E $\overline{abc}$), über die nach B verstorbenen C aber $= \frac{\gamma}{2\beta}$ (E a — E $\overline{ab}$ — E $\overline{ac}$ + E $\overline{abc}$) sey, wo β und γ die Altersergänzungen sind. Brune giebt selbst dies für eine Näherung aus; indefsen kann doch die Abweichung von dem wahren Werthe so bedeutend werden, dafs man die Näherung kaum als eine solche ansehen kann.

Herr *Morgan* setzt in seinen Principles & doctrine S. 194 und 197 die Anzahl derer C, welche bis zur kleinsten Altersergänzung z nach B sterben, $= \frac{(B - B^{\overline{z}})\,(C - C^{\overline{z}})}{z}$,

und die Anzahl der B, die bis dahin nach C sterben, eben so grofs; von der Zeit z an aber setzt er das Ueberleben der jüngeren Person $B = \frac{\int A B^{\overline{z-1}} (C - C^{\overline{z}})}{B \quad C} \times \frac{B^{\overline{z}}}{B} E\overline{b \dagger z}$, oder, wenn man die Wahrscheinlichkeit, dafs bis zum Ablauf der Zeit z B nach C verstorben ist, mit $\varphi^{\overline{z}}$ bezeichnet, $= \varphi^{\overline{z}} \frac{B^{\overline{z}}}{B} E\overline{b \dagger z}$. Das Ueberleben der B von der Zeit z an ist hiebey theoretisch richtig angegeben. Dagegen ist die erstere Annahme, wodurch begreiflich bequemere Ausdrücke für die Berechnung entstehen, nicht richtig. Wenn man die ersten drey Decremente von B mit a, b, c, und die ersten drey Decremente von C mit α, β, γ bezeichnet, so ist $\frac{(B - B^{1})(C - C^{1})}{2} = \frac{1}{2}(a\alpha \dagger a\beta \dagger a\gamma \dagger b\alpha \dagger b\beta \dagger b\gamma \dagger c\alpha \dagger c\beta \dagger c\gamma)$. Die wahre Anzahl der nach B verstorbenen C ist $= \frac{1}{2}(a\alpha \dagger b\beta \dagger c\gamma) \dagger \beta a \dagger \gamma a \dagger \gamma b$, und die wahre Anzahl der nach C verstorbenen $B = \frac{1}{2}(a\alpha \dagger b\beta \dagger c\gamma) \dagger b\alpha \dagger c\alpha \dagger c\beta$, woraus sich schon ergiebt, dafs diese Gröfsen nicht durchgängig gleich seyn können. Wenn z. B. B 20 und C 85 Jahr alt ist, so erhält man aus Süfsmilchs Tabelle nach Morgans Methode die Anzahl sowohl der bis zum Abgang der ältesten Person nach B verstorbenen C als der nach C verstorbenen $B = 493$. Nach dem Vorhergehenden ist die erste Zahl $= 614$, und die letztere $= 372$, welche Zahlen man auch bey einer Näherung wohl nicht als gleich annehmen kann.

Der Grund der Schwierigkeit dieser Probleme ist übrigens schon in der von mir gebrauchten Benennung des *zwiefachen* Ueberlebens angegeben, und es erklärt sich hieraus hinlänglich,

warum dieses Ueberleben nicht durch die Werthe der mittlern Lebens- und Verbindungsdauern, sondern nur allenfalls durch Producte der Lebensdauern in einander ausgedruckt werden kann. Bey der Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens war die Formel für die Zahl der in jedem Jahre überlebenden $A = A^{\overline{n}} \Delta B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})$; wenn es aber auf die Dauer des Ueberlebens ankömmt, so ist diese für jedes nte Jahr $= A^{\overline{n}} \int \overline{\Delta B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})}$, indem nun $A^{\overline{n}}$ mit der Summe aller vorher nach C verstorbenen B multiplicirt werden muſs; daher entsteht hier noch eine Summirung, die bey der Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens nicht vorkömmt.

Wollte man mit den Aufgaben dieser Art noch weiter gehen und z. B. fragen, wie lange leben in der Verbindung A B F G P Q, die beiden Personen A B zusammen, nachdem zuerst P Q und dann F G verstorben sind, so lieſse sich zwar nach dem Vorhergehenden ein Ausdruck für die Auflösung der Aufgabe angeben, indeſsen ist aus demjenigen, was über die beiden letzten Probleme bemerkt worden, abzunehmen, mit welchen Schwierigkeiten die Berechnung nach einer solchen Formel verbunden seyn würde.

Fünftes Kapitel.

Vom

längsten Leben unter mehreren Personen.

§. 230.

In einem Verein mehrerer Personen kann nicht nur *das längste Leben des Einzelnen*, sondern auch die *Dauer der längsten Verbindung* eines jeden in dem Verein möglichen Grades in Betracht kommen. Von dem längsten Leben des Einzelnen in einer Verbindung von zwey Personen ist schon oben §. 140 gehandelt; dabey giebt es nur eine einzige Verbindung von zwey Personen, wofür nur eine mittlere Dauer angegeben werden kann. Wenn anfänglich drey Personen A, B, C verbunden sind, so sind nicht nur drey einzelne Existenzen, sondern auch drey verschiedene Verbindungen zu zwey, nämlich A B, A C und B C, und es kann also nicht nur nach dem längsten Leben des Einzelnen, sondern auch nach der längsten Verbindung zu zwey gefragt werden; dagegen giebt es nur eine einzige Verbindung zu drey, die lediglich nach ihrer mittleren Dauer zu bestimmen ist. In einem anfänglichen Verein von vier Personen giebt es vier einzelne Existenzen, sechs verschiedene Verbindungen zu zwey, vier verschiedene Verbindungen zu drey, und eine Verbindung zu vier; folglich kann zu be-

stimmen seyn das längste Leben des Einzelnen, die längste Verbindung zu zwey und die längste Verbindung zu drey; für die Verbindung zu vier ist nur die mittlere Dauer anzugeben.

Aufserdem kann noch in Betracht kommen das *Ueberleben einer jeden längsten Verbindung*, die Verbindung nach dem Exponenten 1 mit eingerechnet, über die nächsthöhere längste Verbindung, oder, wie es hier der Kürze wegen genannt werden soll, die *Alleindauer jeder Verbindung* eines bestimmten Grades, d. i. die Zeit, während welcher eine Verbindung dieses Grades ohne irgend eine andre höhere besteht.

Anm. Zur Erläuterung bemerke ich noch. Wenn ein Verein anfänglich aus m Personen besteht und die Anzahl der Vereine $= A\,B\,C\,..\,K$ gesetzt wird, so dauern einige Vereine fort in ungetrennter Verbindung, andre dauern fort in Verbindungen zu $m - 1$, noch andre in Verbindungen zu $m - 2$, etc. und noch andre in einzelnen Individuen. Es kömmt folglich bey Bestimmung des längsten einzelnen Lebens in jedem Verein darauf an, wie lange die ungetrennten Vereine bestehen, wie lange noch überdem alle Verbindungen nach $m - 1$, nach $m - 2$ etc. bestehen, und wie lange überdem die einzelnen Existenzen fortwähren; nimmt man nun alle diese Zeiten zusammen und dividirt mit $A\,B\,C\,..\,K$, so erhält man das längste Leben des einzelnen in jedem Vereine. Eben so besteht irgend eine Verbindung zu zwey in jedem Vereine, so lange die Verbindungen zu m fortdauern, so lange noch irgend eine Verbindung zu $m - 1$, $m - 2$ etc. und so lange noch eine Verbindung zu zwey allein besteht; nimmt man wieder alle diese Zeiten der gesammten Verbindungen zusammen und dividirt mit $A\,B\,C\,..\,K$, so hat man die Dauer der längsten Verbindung zu zwey in jedem Vereine.

§. 230. b.

Sind anfänglich m Personen, nämlich A B C bis K in einem Verein vorhanden, wird die Anzahl der Vereine = A B C .. K gesetzt, so mufs also, wenn das längste Leben des Einzelnen in jedem Verein gesucht wird, zusammengenommen werden die Dauer der Verbindungen nach m, das gesammte Ueberleben aller Verbindungen nach m—1, m—2 etc. über die nächsthöhere Verbindung, so wie endlich das gesammte Ueberleben der Einzelnen über die übrigen Personen im Verein, und die Summe dieser Zeiten mufs mit A B C .. K dividirt werden. Auf eben die Weise wird die Dauer der längsten Verbindung nach zwey in dem Vereine gefunden, wenn man alle die vorhin angegebenen Zeiten, mit Ausnahme des Ueberlebens der Einzelnen, zusammennimmt und mit A B C .. K dividirt etc. Anstatt defsen kann man aber auch den Inbegriff der Jahre, welche sämmtliche anfängliche Vereine ungetrennt durchleben und sämtliche Verbindungen der verschiedenen Vereine überleben, den Inbegriff jeder gleichnamigen Verbindung für sich genommen, mit A B C .. K dividiren und die Quotienten addiren, d. h. man kann sofort die mittlere Dauer der ursprünglichen Verbindung, imgleichen das mittlere Ueberleben jeder Verbindung von allen Graden von m — 1 an bis u zusammennehmen, um die Dauer der längsten Verbindung nach u zu finden.

§. 231.

Soll nun zuerst die Dauer der längsten Verbindung *nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens*, und zwar unter m Personen von gleichem Alter a, wozu die Ergänzung α gehört, gesucht werden, so ist die mittlere Dauer der Verbindung nach $m = \frac{\alpha}{m + 1}$ (§. 203); ferner ist die Summe des mittlern Ueberlebens aller Verbindungen nach $m - 1$ wieder $= \frac{\alpha}{m + 1}$, die Summe des mittlern Ueberlebens aller Verbindungen nach $m - 2$ ebenfalls $= \frac{\alpha}{m + 1}$, so wie überhaupt die Summe des mittlern Ueberlebens aller Verbindungen nach $m - u$ über die nächsthöhere Verbindung gleichfalls $= \frac{\alpha}{m + 1}$ (§. 220). Man erhält also die Dauer der längsten Verbindung nach $m = \frac{\alpha}{m + 1}$, die Dauer der längsten Verbindung nach $m - 1 = \frac{\alpha}{m + 1} + \frac{\alpha}{m + 1} = \frac{2\alpha}{m + 1}$, die Dauer der längsten Verbindung nach $m - 2 = \frac{2\alpha}{m + 1} + \frac{\alpha}{m + 1} = \frac{3\alpha}{m + 1}$, so wie überhaupt die Dauer der längsten Verbindung nach $m - u = \frac{u + 1}{m + 1}\alpha$, folglich

die Dauer des längsten einzelnen Lebens oder der Verbindung nach $m - m + 1 = \frac{m}{m+1} \alpha$.

Hieraus läfst sich also der vollständige Werth der Dauer jeder längsten Verbindung, von welchem Grade es auch sey, sehr leicht angeben.

Anm. 1. Was von der Altersergänzung, wenn das längste Leben des Einzelnen davon abgezogen wird, übrig bleibt, ist die Zeit des Ganzausgestorbenseyns des Vereins, welche hiernach $= \frac{\alpha}{m+1}$ wird, wie es nach §. 220 seyn mufs.

Hiernach bleibt also das längste Leben des Einzelnen, oder $\frac{m}{m+1} \alpha$, immer kleiner als α, wie grofs auch die Zahl der zusammenlebenden Personen angenommen werden mag. Das scheint in einem Wiederspruche mit der Sterbensordnung zu stehen, da sonach, wenn auch $m = A$, d. h. der anfänglichen Zahl der Lebenden vom Alter a gleich ist, doch das längste Leben nur $= \frac{A}{A+1} \alpha$ wird, wiewohl nach der Sterbensordnung von A Personen Eine das höchste Alter erreicht. Der Widerspruch ist indefsen nur scheinbar, und diese Behauptungen stimmen, richtig verstanden, völlig mit einander überein. Nach der Süfsmilchschen Sterbensordnung lebt z. B. im Anfange des Jahrs 95 noch eine einzige Person, im Anfange des Jahrs 96 aber keine; die letzte Person stirbt nämlich im Jahre 95, noch vor dem Anfange des Jahrs 96, und erreicht also die Gränze nicht. Wenn im Anfange des Jahrs 95 auch noch 100 Personen lebten, so mufsten doch, falls 96 wieder das höchste Alter seyn soll, diese 100 Personen sämtlich im Laufe des Jahrs 95, folglich vor dem Anfange des Jahrs 96, absterben, und keine von ihnen würde die Gränze erreichen. Nur wenn $m = \infty$ gesetzt wird, so wäre der Unter-

schied $\frac{m+1}{m+1} - \frac{m}{m+1} = \frac{1}{m+1} = \frac{1}{\infty}$, und die letzte Person würde einen unendlich kleinen Zeittheil vor dem Anfange des Jahrs 96 sterben.

Dies ist die richtige Auflösung des anscheinenden Widerspruchs. Tetens dagegen demonstrirt S. 486 etc. in seiner Einleitung, dafs, wenn gleich nach der Sterbensordnung von A Personen eine das höchste Alter erreiche, dies nur von dem Durchschnitt gelte, und nicht von jedem Haufen von A Personen des Alters a angenommen werden könne. Das ist freilich wahr; es ist nicht wahrscheinlich, dafs in jedem Haufen dieser Art gerade eine Person sey, die das höchste Alter erreiche, eben so wenig als es gewifs oder auch nur wahrscheinlich ist, dafs jede einzelne Person vom Alter a gerade noch die mittlere Lebensdauer erreiche. Wenn man aber *nach dem Durchschnitt* rechnen will und mufs, so kann man nicht anders annehmen, als dafs eine gegebene Person das mittlere Alter erreiche, so wie dafs von A Personen des Alters a eine das höchste Alter erreiche, d. h. im Allgemeinen, dafs der Durchschnitt für die gegebenen Fälle gelte. Dies ist der Grund der ganzen Berechnung der mittlern Zeiten und mittlern Rentenwerthe.

Anm. 2. Es würde sich auch für Personen verschiedenen Alters, unter Voraufsetzung des gleichmäfsigen Absterbens, eine Formel für die Dauer der längsten Verbindung jedes Grades angeben lafsen. Sie würde indefsen von der allgemeinen Formel, die in den folgenden §. §. aufgestellt wird, nicht wesentlich verschieden seyn, und ich glaube daher hier auf diese folgenden §. §. verweisen zu können.

§. 232.

Wird *nach irgend einer beliebigen Sterbensordnung* in einer anfänglichen Verbindung nach 3 das längste Leben des Einzelnen gesucht, und wer-

den die Personen mit A, B, C und ihr Alter mit a, b, c bezeichnet, so ist zusammen zu nehmen das mittlere Ueberleben von A, von B, und von C über die Verbindung zu zwey, ferner das mittlere Ueberleben der Verbindung von AB, von AC und BC über die Verbindung von A B C, so wie zuletzt die mittlere Dauer der Verbindung von A B C, folglich wird nach §. 222 das gesuchte längste Leben

$$
\begin{array}{llll}
= Ea & - (E\,\overline{ab} & + E\,\overline{ac}) & + E\,\overline{abc} \\
+ Eb & - (E\,\overline{ab} & + E\,\overline{bc}) & + E\,\overline{abc} \\
+ Ec & - (E\,\overline{ac} & + E\,\overline{bc}) & + E\,\overline{abc} \\
 & + E\,\overline{ab} & & - E\,\overline{abc} \\
 & + E\,\overline{ac} & & - E\,\overline{abc} \\
 & + E\,\overline{bc} & & - E\,\overline{abc} \\
 & & & + E\,\overline{abc}
\end{array}
$$

$= (Ea + Eb + Ec) - (E\,\overline{ab} + E\,\overline{ac} + E\,\overline{bc}) + E\,\overline{abc}$, und wenn man, wie oben, die Existenz irgend eines Einzelnen mit $E\,\overline{I}$, die Coexistenz irgend eines Paars unter den gegebenen Personen mit $E\,\overline{II}$, die Coexistenz irgend einer Conternation mit $E\,\overline{III}$, und die Summe der Existenzen oder Coexistenzen jeder Art mit $S.E\,\overline{I}$, $S.E\,\overline{II}$ etc. bezeichnet, so hat man das längste Leben $= S.E\,\overline{I} - S.E\,\overline{II} + E\,\overline{III}$.

Suchte man, bey einer anfänglichen Verbindung

nach 3, die Dauer der längsten Verbindung nach 2, so wäre sie nach dem Vorhergehenden $=$ $E\overline{ab} - E\overline{abc} + E\overline{ac} - E\overline{abc} + E\overline{bc} - E\overline{abc} + E\overline{abc} = (E\overline{ab} + E\overline{ac} + E\overline{bc}) - 2E\overline{abc} = S.E\overline{II} - 2E\overline{III}.$

Die Verbindung nach 3 ist nur eine einzige.

Ferner ist in einer anfänglichen Verbindung nach 4, das längste Leben des Einzelnen $=$

$$
\begin{array}{llll}
Ea - (E\overline{ab} + E\overline{ac} + E\overline{ad}) + (E\overline{abc} + E\overline{abd} + E\overline{acd}) - E\overline{abcd} \\
+Eb - (E\overline{ab} + E\overline{bc} + E\overline{bd}) + (E\overline{abc} + E\overline{abd} + E\overline{bcd}) - E\overline{abcd} \\
+Ec - (E\overline{ac} + E\overline{bc} + E\overline{cd}) + (E\overline{abc} + E\overline{acd} + E\overline{bcd}) - E\overline{abcd} \\
+Ed - (E\overline{ad} + E\overline{bd} + E\overline{cd}) + (E\overline{abd} + E\overline{acd} + E\overline{bcd}) - E\overline{abcd} \\
+ E\overline{ab} & - (E\overline{abc} + E\overline{abd}) & + E\overline{abcd} \\
+ E\overline{ac} & - (E\overline{abc} + E\overline{acd}) & + E\overline{abcd} \\
+ E\overline{ad} & - (E\overline{abd} + E\overline{acd}) & + E\overline{abcd} \\
+ E\overline{bc} & - (E\overline{abc} + E\overline{bcd}) & + E\overline{abcd} \\
+ E\overline{bd} & - (E\overline{abd} + E\overline{bcd}) & + E\overline{abcd} \\
+ E\overline{cd} & - (E\overline{acd} + E\overline{bcd}) & + E\overline{abcd} \\
 & + E\overline{abc} & - E\overline{abcd} \\
 & + E\overline{abd} & - E\overline{abcd} \\
 & + E\overline{acd} & - E\overline{abcd} \\
 & + E\overline{bcd} & - E\overline{abcd} \\
 & & + E\overline{abcd}
\end{array}
$$

$= (Ea + Eb + Ec + Ed) - (E\overline{ab} + E\overline{ac} + E\overline{ad} + E\overline{bc} + E\overline{bd} + E\overline{cd}) + (E\overline{abc} + E\overline{abd} + E\overline{acd} + E\overline{bcd}) - E\overline{abcd} = S.E\overline{I} - S.E\overline{II} + S.E\overline{III} - E\overline{IV}.$

Die längste Verbindung nach 2 wäre =

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\,\overline{ab} - (\mathrm{E}\,\overline{abc} + \mathrm{E}\,\overline{abd}) + \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
+\ &\mathrm{E}\,\overline{ac} - (\mathrm{E}\,\overline{abc} + \mathrm{E}\,\overline{acd}) + \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
+\ &\mathrm{E}\,\overline{ad} - (\mathrm{E}\,\overline{abd} + \mathrm{E}\,\overline{acd}) + \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
+\ &\mathrm{E}\,\overline{bc} - (\mathrm{E}\,\overline{abc} + \mathrm{E}\,\overline{bcd}) + \mathrm{E}\,abcd\\
+\ &\mathrm{E}\,\overline{bd} - (\mathrm{E}\,\overline{abd} + \mathrm{E}\,\overline{bcd}) + \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
+\ &\mathrm{E}\,\overline{cd} - (\mathrm{E}\,\overline{acd} + \mathrm{E}\,\overline{bcd}) + \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
&\qquad + \mathrm{E}\,\overline{abc} \qquad\qquad - \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
&\qquad + \mathrm{E}\,\overline{abd} \qquad\qquad - \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
&\qquad + \mathrm{E}\,\overline{acd} \qquad\qquad - \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
&\qquad + \mathrm{E}\,\overline{bcd} \qquad\qquad - \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathrm{E}\,\overline{abcd}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{E}\,\overline{ab} + \mathrm{E}\,\overline{ac} + \mathrm{E}\,\overline{ad} + \mathrm{E}\,\overline{bc} + \mathrm{E}\,\overline{bd}\\
&+ \mathrm{E}\,\overline{cd}) - 2\,(\mathrm{E}\,\overline{abc} + \mathrm{E}\,\overline{abd} + \mathrm{E}\,\overline{bcd})\\
&+ 3\,\mathrm{E}\,\overline{abcd} = S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{II}} - 2\,S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{III}} + 3\,\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{IV}}.
\end{aligned}
$$

Die Dauer der längsten Verbindung nach 3 wird

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{E}\,\overline{abc} + \mathrm{E}\,\overline{abd} + \mathrm{E}\,\overline{acd} + \mathrm{E}\,\overline{bcd}) - 4\,\mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathrm{E}\,\overline{abcd}\\
&= S.\,\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{III}} - 3\,\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{IV}}.
\end{aligned}
$$

Auf eben die Weise findet man bey einer anfänglichen Verbindung nach 5 das längste Leben des Einzelnen $= S.\mathrm{E}\,\mathrm{I} - S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{II}} + S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{III}} - S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{IV}} + \mathrm{E}\,\mathrm{V}$, die Dauer der längsten Verbindung zu 2

$= S.E\overline{II} - 2\ S.E\overline{III} + 3\ S.E\overline{IV} - 4\ EV$, die Dauer der längsten Verbindung zu $3 = S.E\overline{III} - 3\ S.E\overline{IV} + 6\ EV$, und die Dauer der längsten Verbindung zu $4 = S.E\overline{IV} - 4\ EV$.

Das allgemeine Gesetz, wonach die Dauer der längsten Verbindung zu n in den ersten fünf Graden ausgedruckt werden kann, ist also

$$S.EN - \frac{n}{1} S.E\overline{N+I} + \frac{n.n+1}{1.2} S.E\overline{N+II} - \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3} S.E\overline{N+III} + \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4} S.E\overline{N+IV} - ..$$

§. 233.

Die *Alleindauer* irgend einer Verbindung, oder das Ueberleben der längsten Verbindung, nach n ist die Differenz zwischen der Dauer der längsten Verbindung nach n und der Dauer der zuletztbestehenden Verbindung nach $n + 1$, welches an sich klar ist. Wird also die Alleindauer des einzelnen Lebens in einer anfänglichen Verbindung nach 3 gesucht, so hat man dieselbe $=$

$$\begin{array}{r} S.EI - S.E\overline{II} + E\overline{III} \\ - S.E\overline{II} + 2\ E\overline{III} \\ \hline = S.EI - 2\ S.E\overline{II} + 3\ E\overline{III}; \end{array}$$

eben so ist hier die Alleindauer der Verbindung zu $2 =$

$$S.E\overline{II} - 2\,E\overline{III}$$
$$- \quad E\overline{III}$$

$$= S.E\overline{II} - 3\,E\overline{III}.$$

Ferner ist in einer anfänglichen Verbindung zu 4 die Alleindauer des Einzelnen =

$$S.EI - S.E\overline{II} + S.E\overline{III} - E\overline{IV}$$
$$- S.E\overline{II} + 2\,S.E\overline{III} - 3\,E\overline{IV}$$

$$= S.EI - 2\,S.E\overline{II} + 3\,S.E\overline{III} - 4\,E\overline{IV},$$

die Alleindauer der Verbindung zu 2 =

$$S.E\overline{II} - 2\,S.E\overline{III} + 3\,E\overline{IV}$$
$$- \quad S.E\overline{III} + 3\,E\overline{IV}$$

$$= S.E\overline{II} - 3\,S.E\overline{III} + 6\,E\overline{IV},$$

die Alleindauer der Verbindung zu 3 aber =

$$S.E\overline{III} - 3\,E\overline{IV} - E\overline{IV} = S.E\overline{III} - 4\,E\overline{IV}.$$

Noch ist in einer anfänglichen Verbindung zu 5 die Alleindauer des einzelnen Lebens =

$$S.EI - S.E\overline{II} + S.E\overline{III} - S.E\overline{IV} + EV$$
$$- S.E\overline{II} + 2\,S.E\overline{III} - 3\,S.E\overline{IV} + 4EV$$

$$= S.EI - 2\,S.E\overline{II} + 3.SE\overline{III} - 4\,S.E\overline{IV} + 5EV,$$

die Alleindauer der Verbindung zu 2 =

$$S.E\overline{II} - 2\,S.E\overline{III} + 3\,S.E\overline{IV} - 4\,EV$$
$$- \quad S.E\overline{III} + 3\,S.E\overline{IV} - 6\,EV$$

$$= S.E\overline{II} - 3\,S.E\overline{III} + 6\,S.E\overline{IV} - 10\,EV,$$

die Alleindauer der Verbindung zu 3 =

$$S.E\,\overline{III} - 3\ S.E\,\overline{IV} + 6\ E\,V$$
$$- \quad S.E\,\overline{IV} + 4\ E\,V$$

$= S.E\,\overline{III} - 4\ S.E\,\overline{IV} + 10\ E\,V,$

so wie die Alleindauer der Verbindung zu 4 $=$

$S.E\,\overline{IV} - 4\ E\,V - E\,V = S.E\,IV - 5\ E\,V.$

Für die hier angeführten Grade ist also das Gesetz, welches die Alleindauer jeder Verbindung nach n ausdruckt: $S.E\,N - \frac{n+1}{1}\ S.E\,\overline{N+I}$

$+ \frac{n+1.n+2}{1.2}\ S.E\overline{N+II} - \frac{n+1.n+2.n+3}{1.2.3} \times$

$S.E\,\overline{N+III} + \frac{n+1.n+2.n+3.n+4}{1.2.3.4}\ S.E\overline{N+IV}$-..

Anm. Uebrigens bezeichnet $S.E\,\overline{N+X}$ die Summe der Verbindungen nach $n+x$ unter einer bestimmten Anzahl von Personen, wo alle Personen als gleich betrachtet werden. Dagegen war vorher §. 220 $S.E\,N.X$ die Summe der Verbindungen nach $n+x$ unter der gegebenen Anzahl von Personen, wo aber in jeder Verbindung n bestimmte Personen mit enthalten waren.

§. 234.

Die Allgemeinheit des in den vorhergehenden beiden Paragraphen angegebenen Gesetzes für die Dauer der längsten Verbindung, imgleichen für die Alleindauer dieser Verbindung wird folgendermafsen erwiesen.

Wenn die Anzahl der anfänglich verbundenen Personen, von gleichem oder ungleichem Alter, = q ist und das Absterben derselben succesiv geschieht, so existiren vom Ablauf der Altersergänzung der jüngsten Person an, in den verschiedenen Zeittheilen, die zwischen dem jedesmaligen Abgange zweier Personen enthalten sind, *rückwärts* gerechnet, einzelne Personen 1, 2, 3 etc. .. q, Paare, von einem Zeittheile weiter rückwärts an gerechnet, 1, 3, 6 etc. . . $\frac{q \cdot q - 1}{1 \cdot 2}$, Conternationen, wieder von einem Zeittheile weiter rückwärts gerechnet, 1, 4, 10 etc. . . $\frac{q \cdot q - 1 \cdot q - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, Conquaternationen, abermals von einem Zeittheile weiter rückwärts gerechnet, 1, 5, 15 etc. . . $\frac{q \cdot q - 1 \cdot q - 2 \cdot q - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, u. s. w., Verbindungen nach q während des letzten Zeittheils, rückwärts gerechnet, $\frac{q \cdot q - 1 \,..\, 1}{1 \cdot 2 \,..\, q} = 1$.

Werden nun die verschiedenen Zeittheile, die gleich oder ungleich seyn mögen, in ihrer Ordnung *rückwärts* mit a, b, c, d .. m, n, o, p, q bezeichnet, wo also a die Alleindauer des Einzelnen oder das Ueberleben des Längstlebenden, b die Alleindauer der Verbindung zu 2 oder das Ueberleben der längsten Verbindung dieses Grades, c die Alleindauer der Verbindung zu 3 etc. bezeichnet, so ist

$$S.E\,I = a + 2b + 3c + .. + q \cdot q$$

$$S.E\,\overline{II} = b + 3c + 6d + .. + \frac{q \cdot q - 1}{1 \cdot 2}\, q$$

$$S.E\,\overline{III} = c + 4d + 10e + .. + \frac{q.q - 1.q - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, q$$

etc. etc.

$$S.E\,\overline{Q - II} = o + \frac{q - 1.q - 2 \,..\, 2}{1 \cdot 2 \,..\, q - 2}\, p + \frac{q.q - 1..3}{1.2 \,..\, q\text{-}2} \cdot q$$

$$S.E\,\overline{Q - I} = p + \frac{q \cdot q - 1 \,..\, 2}{1 \cdot 2 \,..\, q - 1}\, q$$

$$S.E\,\overline{Q} = q.$$

Wenn man ferner

$$\mathfrak{A} = a + b + c + .. + q,$$
$$\mathfrak{B} = b + c + d + .. + q,$$
$$\mathfrak{C} = c + d + e + .. + q,$$

etc etc.

$$\mathfrak{D} = o + p + q,$$
$$\mathfrak{P} = p + q,$$
und $\mathfrak{Q} = q$

setzt, so bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Dauer des längsten einzelnen Lebens, $\mathfrak{B}$ die Dauer der längsten Verbindung zu 2, $\mathfrak{C}$ die Dauer der längsten Verbindung zu 3 etc., $\mathfrak{D}$ die Dauer der längsten Verbindung zu $q - 2$, $\mathfrak{P}$ die Dauer der längsten Verbindung zu $q - 1$ und $\mathfrak{Q} = q$ die Dauer der allgemeinen Verbindung zu q, und es ist dann

$$S.E\,I = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \ldots + \mathfrak{Q}$$

$$S.E\,\overline{II} = \mathfrak{B} + 2\,\mathfrak{C} + 3\,\mathfrak{D} + \ldots + \frac{q-1}{1}\,\mathfrak{Q}$$

$$S.E\,\overline{III} = \mathfrak{C} + 3\,\mathfrak{D} + 6\,\mathfrak{E} + \ldots + \frac{q-1.q-2}{1\,.\,2}\,\mathfrak{Q}$$

etc. etc.

$$S.E\overline{Q-II} = \mathfrak{Q} + \frac{q-2.q-3\,..\,2}{1.2\,..\,q-3}\,\mathfrak{P} + \frac{q-1.q-2\,..\,3}{1.2\,..\,q-3}\,\mathfrak{Q}$$

$$S.E\overline{Q-I} = \mathfrak{P} + \frac{q-1.q-2\,..\,2}{1\,.\,2\,..\,q-2}\,\mathfrak{Q}$$

$$S.EQ = \mathfrak{Q},$$

oder auch

$$S.E\,I = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \ldots + \mathfrak{Q},$$

$$S.E\,\overline{II} = \mathfrak{B} + \frac{2}{1}\,\mathfrak{C} + \frac{2.3}{1.2}\,\mathfrak{D} + \ldots + \frac{2.3\,..\,q-1}{1.2\,..\,q-2}\,\mathfrak{Q},$$

$$S.E\,\overline{III} = \mathfrak{C} + \frac{3}{1}\,\mathfrak{D} + \frac{3.4}{1.2}\,\mathfrak{E} + \ldots + \frac{3.4\,..\,q-1}{1.2\,..\,q-3}\,\mathfrak{Q},$$

etc. etc.

$$S.E\overline{Q-II} = \mathfrak{Q} + \frac{q-2}{1}\,\mathfrak{P} + \frac{q-2.q-1}{1\,.\,2}\,\mathfrak{Q},$$

$$S.E\overline{Q-I} = \mathfrak{P} + \frac{q-1}{1}\,\mathfrak{Q},$$

$$S.EQ = \mathfrak{Q}.$$

Hieraus ergiebt sich also

$$\mathfrak{Q} = s.\mathrm{EQ},$$

$$\mathfrak{P} = s.\mathrm{E}\overline{\mathrm{Q}-\mathrm{I}} - \frac{q-1}{1}\,\mathrm{E\,Q},$$

$$\mathfrak{O} = s.\mathrm{E}\overline{\mathrm{Q}-\mathrm{II}} - \frac{q-2}{1}\,\mathfrak{P} - \frac{q-2.q-1}{1.2}\,\mathfrak{Q}$$

$$= s.\mathrm{E}\overline{\mathrm{Q}-\mathrm{II}} - \frac{q-2}{1}\,s\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{Q}-\mathrm{I}} + \frac{q-2}{1}\cdot\frac{q-1}{1}\,\mathrm{E\,Q}$$

$$- \frac{q-2.q-1}{1.2}\,\mathrm{E\,Q}$$

$$= s.\mathrm{E}\overline{\mathrm{Q}-\mathrm{II}} - \frac{q-2}{1}\,s\mathrm{E}\overline{\mathrm{Q}-\mathrm{I}} + \frac{q-2.q-1}{1.2}\,\mathrm{EQ}.$$

Bezeichnet man überhaupt die Anzahl der Personen, für welche die Dauer der längsten Verbindung gesucht wird, mit X, so ist für die angeführten drey längsten Verbindungen diese Dauer =

$$s.\mathrm{E\,X} - x\;s.\mathrm{E}\overline{\mathrm{X}+\mathrm{I}} + \frac{x.x+1}{1.2}\,s.\mathrm{E}\overline{\mathrm{X}+\mathrm{II}} \ldots,$$

und es gilt daher das oben angegebene Gesetz für diese drey höchsten Verbindungen. Dafs dafselbe aber, wenn es für die höchsten Verbindungen in der Reihe erwiesen ist, auch für die nächstvorhergehende gelten müfse, ergiebt sich auf folgende Art.

Wenn dieses Gesetz für die vier höchsten Verbindungen, deren längste Dauer mit $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bezeichnet werden mag, richtig ist, so ist

$$\mathfrak{N} = S\mathrm{EN} - n\,S\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{I}} + \frac{n.n\dagger 1}{1,2}\,\mathrm{S\,E}\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{II}} - \frac{n.n\dagger 1.n\dagger 2}{1.2.3}\,\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{III}},$$

$$\mathfrak{O} = S\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{I}} - \frac{n\dagger 1}{1}\,S\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{II}} + \frac{n\dagger 1.n\dagger 2}{1.2}\,\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{III}},$$

$$\mathfrak{P} = S\mathrm{EN}\dagger\mathrm{II} - \frac{n\dagger 2}{1}\,\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{III}},$$

$$\mathfrak{Q} = \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{III}}.$$

Wird ferner mit $\mathfrak{M}$ die Dauer der längsten Verbindung unter $\overline{\mathrm{N}-\mathrm{I}}$ Personen bezeichnet, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{M} = S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}-\mathrm{I}} - \frac{n-1}{1}\,\mathfrak{N} - \frac{n-1.n}{1.2}\,\mathfrak{O} - \frac{n-1.n\dagger 1}{1.2.3}\,\mathfrak{P} - \frac{n-1.n.n\dagger 1.n\dagger 2}{1.2.3.4}\,\mathfrak{Q};$$

folglich wird, wenn man für $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ihre obigen Werthe setzt,

$$\left.\begin{array}{l} S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}-\mathrm{I}} = S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}-\mathrm{I}} \\ -\frac{n-1}{1}\,\mathfrak{N} = -\frac{n-1}{1}\,S.\mathrm{EN}\dagger\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n}{1}\,S.\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{I}} - \\ -\frac{n-1.n}{1.2}\,\mathfrak{O} = \qquad -\frac{n-1.n}{1.2}\,S\,\mathrm{E}\,\overline{\mathrm{N}\dagger\mathrm{I}}\dagger \\ -\frac{n-1.n.n\dagger 1}{1.2.3}\,\mathfrak{P} = \\ -\frac{n-1.n.n\dagger 1.n\dagger 2}{1.2.3.4}\,\mathfrak{Q} = \end{array}\right\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n.n+1}{1.2}\ S.E\,\overline{N+II} + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\ E\,\overline{N+III} \\ \frac{n-1.n}{1.2} \cdot \frac{n+1}{1}\ S.E\,\overline{N+II} \cdot \frac{n-1.n}{1.2} \cdot \frac{n+1.n+2}{1.2}\ E\,\overline{N+III} \\ \frac{n-1.n.n+1}{1.2.3}\ S.E\,\overline{N+II} + \frac{n-1.n.n+1}{1.2.3} \cdot \frac{n+2}{1}\ E\,\overline{N+III} \\ -\frac{n-1.n.n+1.n+2}{1.2.3.4}\ E\,\overline{N+III}. \end{cases}$$

Dafs nun die Summen der Verbindungsdauern nach dem angegebenen Gesetze fortgehen, erhellet aus der Art, wie die einzelnen Theile des angeführten Ausdrucks durch die Multiplication entstanden sind, unmittelbar. Wenn ferner alle in eine und dieselbe Summe der Verbindungsdauern multiplicirte Factoren oder Producte als ein einziger Coefficient $= C$ angesehen werden, und die Anzahl der Theile dieses Coefficienten $= r$ ist, so ist allgemein, die Theile von unten nach oben zu genommen,

$$C = -\,\overline{n-1.n.n+1}\,\cdot\cdot\,\overline{n+r-2}\,\left(\frac{1}{1.2\,..\,r} - \frac{1}{1.2\,..\,r-1.1} + \frac{1}{1.2\,..\,r-2.1.2} - \frac{1}{1.2..r-3.1.2.3} + \,..\,\overline{+}\,\frac{1}{1.1.2\,..\,r-1}\right).$$

Die in Klammern eingeschlofsene Summe ist $=$

$$\frac{1}{1.2\,..\,r}\left[\frac{1.2\,..\,r}{1.2\,..\,r} - \frac{1.2\,..\,r}{1.2\,..\,r-1.1} + \frac{1.2\,..\,r}{1.2\,..\,r-2.1.2} - \frac{1.2\,..\,r}{1.2\,..\,r-3.1.2.3} + \,..\,\overline{+}\right.$$

$$\frac{1.2..r}{1.1.2..r-1}] = \frac{1}{1.2..r}[1 - \frac{r}{1} + \frac{r.r-1}{1.2} - \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + .. \mp \frac{r.r-1..2}{1.2..r-1}] = \frac{1}{1.2..r}[(1-1)^r \mp 1] = \mp \frac{1}{1.2..r}$$

, wo das obere Zeichen steht, wenn r gerade, und das untere, wenn r ungerade ist. Folglich wird der Coefficient oder $C = \mp \frac{n-1.n.n+1..n+r-2}{1.2..r}$, wo das obere Zeichen für ein gerades und das untere für ein ungerades r gilt, und r im ersten Gliede nach $SE\overline{N-1} = 1$, im zweiten $= 2$ ist etc.

Danach wird also, wenn anstatt $N-1$ gesetzt wird M, so wie m anstatt $n-1$, und $m+r = q$ ist, $\mathfrak{M} = S.EM - \frac{m}{1} S.E\overline{M+1} + \frac{m.m+1}{1.2} S.E\overline{M+II} - \frac{m.m+1.m+2}{1.2.3} S.E\overline{M+III} + .. \mp \frac{m.m+1..m+r-1}{1.2..r} E\overline{M+R}$,

und es erhellet hieraus die allgemeine Gültigkeit des vorhin angegebenen Gesetzes für die Dauer der längsten Verbindungen.

Da ferner $\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} + 3\mathfrak{c} + 4\mathfrak{d} + .. = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + ..$, ferner $\mathfrak{b} + 3\mathfrak{c} + 6\mathfrak{d} + .. = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C} + 3\mathfrak{D} + ..$ etc., folglich jede für S.EM aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ etc. zusammengesetzte Reihe in

Ansehung der Coefficienten dieselbe Form hat, als diejenige, die für $S.EM+I$ aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. zusammengesetzt ist, so gilt auch für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ etc. das oben aufgestellte Gesetz, und wenn m die Alleindauer der Verbindung nach m unter den gegebenen $m + r = q$ Personen ist, so hat man $m =$

$$S.EM - \frac{m+1}{1} SEM+I + \frac{m+1.m+2}{1.2} SE\overline{M+II}$$

$$- \frac{m+1.m+2.m+3}{1.2.3} SE\overline{M+III} + ..$$

$$\mp \frac{m+1.m+2..m+r}{1.2..r} E\overline{M+R}.$$

Werden übrigens in allen Gliedern die corrigirten Werthe der mittlern Verbindungsdauern genommen, so bedarf es hier so wenig, als bey dem mittlern Ueberleben, einer weitern Correction.

§. 235.

Wenn bey den Aufgaben des vorhergehenden §. alle Personen von gleichem Alter sind, so ist die mittlere Dauer aller Verbindungen desselben Grades gleich, und man darf dann nur jede mittlere Verbindungsdauer mit der Anzahl der vorhandenen Verbindungen multipliciren, um die Summe dieser Dauer zu finden. Falls also die Anzahl der Personen, woraus die anfängliche Verbindung bestand, $= q$ ist, so hat man, da unter q Personen

$\frac{q.q-1\,..\,q-n+1}{1.2\,..\,n}$ Verbindungen nach n Statt finden, die Summe der Verbindungsdauern vom Grade n, oder $S.EN = \frac{q.q-1\,..\,q-n+1}{1.2\,..\,n} EN.$

Für diesen Fall ist also die Dauer der längsten Verbindung zu n, die einzelne Existenz mit einbegriffen, $= \frac{q.q-1\,..\,q-n+1}{1.2\,..\,n} EN -$

$\frac{n}{1} \cdot \frac{q.q-1\,..\,q-n}{1.2\,..\,n+1} E\overline{N+I} +$

$\frac{n.n+1}{1.2} \cdot \frac{q.q-1\,..\,q-n-1}{1.2\,..\,n+2} E\overline{N+II}$

$- \,..$ etc., und die Alleindauer der längsten Verbindung zu n wird $= \frac{q.q-1\,..\,q-n+1}{1.2\,..\,n} EN -$

$\frac{n+1}{1} \cdot \frac{q.q-1\,..\,q-n}{1.2\,..\,n+1} E\overline{N+I} +$

$\frac{n+1.n+2}{1.2} \cdot \frac{q.q-1\,..\,q-n-1}{1.2\,..\,n+2} E\overline{N+II}$

$- \,..$, wo in beiden Formeln die Reihe so lange fortgeht, bis $\overline{N+X} = Q$ ist, indem, da nur q Personen sind, dann $EQ\overline{+I} = 0$ wird.

Wenn $N = I$ ist, so wird also unter q Personen von gleichem Alter die Dauer des längsten

$$\text{Lebens} = q\,E\,I - \frac{q\cdot q-1}{1\cdot 2}\,E\,\overline{II} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2}{1\cdot 2\cdot 3}\,E\,\overline{III} - \ldots \pm \frac{q\cdot q-1\ldots 1}{1\cdot 2\ldots q}\,E\,Q,$$

und die Alleindauer des Einzelnen wird

$$= q\,EI - 2\cdot\frac{q\cdot q-1}{1\cdot 2}\,E\,\overline{II} + 3\cdot\frac{q\cdot q-1\,q-2}{1\cdot 2\cdot 3}\,E\,\overline{III} - \ldots \pm q\cdot\frac{q.q-1\ldots 1}{1\cdot 2\ldots q}\,E\,Q = q\,E\,I - \frac{q\cdot q-1}{1}\,E\,\overline{II} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2}{1\cdot 2}\,E\,\overline{III} - \ldots \pm q\,E\,Q.$$

Anm. Wenn die Altersergänzung der Personen von gleichem Alter $= \alpha$ gesetzt wird, so ist nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens $Ea = \frac{\alpha}{2}$, $E\alpha^2 = \frac{\alpha}{3}$, $E\alpha^n = \frac{\alpha}{n+1}$. Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für das längste Leben des Einzelnen, so hat man dafselbe

$$= \left(\frac{q}{1.2} - \frac{q.q-1}{1.2.3} + \frac{q.q-1.q-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots \mp \frac{q\cdot q-1\ldots 1}{1\cdot 2\ldots q+1}\right)\alpha = \left(\frac{q+1\cdot q}{1\cdot 2} - \frac{q+1\cdot q\cdot q-1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{q+1\cdot q\cdot q-1\cdot q-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots \mp \frac{q+1\cdot q\ldots 1}{1\cdot 2\ldots q+1}\right)\frac{\alpha}{q+1}.$$

Wenn man

das, was in den Klammern steht, mit T bezeichnet, so ist $1 - \frac{q+1}{1} + T = (1-1)^{q+1} = 0$, also $T = \frac{q+1}{1} - 1 = q$. Folglich wird hienach das längste Leben des Einzelnen $= T\frac{\alpha}{q+1} = \frac{q}{q+1}\alpha$, wie oben im §. 232.

§. 236.

Würde nach der Dauer der längsten Verbindung zu zwey, zu drey etc. gefragt, worin bey einem anfänglichen Verein unter ABCD die Person A vorkömmt, so giebt es in dem angeführten Falle drey Verbindungen zu 2, worin A enthalten ist, nämlich AB, AC und AD, und drey Verbindungen zu 3, worin A vorkömmt, nämlich ABC, ABD ACD; dagegen giebt es nur wieder eine einzige Verbindung zu 4, worin also A nur einmal enthalten ist. Wenn überhaupt die Anzahl der anfänglich zusammengehörigen Personen, A mit eingerechnet, $= q$ ist, so erhält man die Anzahl aller Verbindungen zu 2, worin A vorkömmt, wenn man jede einzelne der $q - 1$ Personen mit A verbindet, so wie die Anzahl aller Verbindungen zu n, worin A vorkömmt, wenn man jede Verbindung nach $n - 1$ unter den übrigen $q - 1$ Personen mit A verbindet. Nun ist, wenn man überhaupt die Existenz irgend einer Person allein unter den $q-1$

übrigen mit E I, die Coexistenz von zweyen unter denselben mit E II etc. und die Summe wieder mit *S*.E I, *S*.E II etc. bezeichnet, das längste Leben des Einzelnen unter den q — 1 Personen = *S*.E I — *S*.E II + *S*.E III — .. ± E Q — 1. Bezeichnet man also mit E a . I die Coexistenz der Person A mit irgend einer der übrigen q — 1, mit E a . II die Coexistenz von A mit irgend 2 der übrigen etc., und die Summen gleichfalls mit *S*.E a . I, *S*.E a . II etc., so ist die längste Verbindung nach zwey, worin A vorkömmt, = *S*.E a.I — *S*.E a.II + *S*.E a.III + .. ± E a.Q — 1.

Ebenfalls ist die Dauer der längsten Verbindung nach n — 1 unter den q — 1 übrigen Personen = *S*.E N — 1 — $\frac{n-1}{1}$ *S*.E N + $\frac{n-1.n}{1.2}$ *S*.E N†I — $\frac{n-1.n.n+1}{1.2.3}$ *S*.E N†II + .. . Folglich wird die längste Verbindung nach n, worin A mit enthalten, = *S*.E a . (N—1) — $\frac{n-1}{1}$ × *S*.E a.N + $\frac{n-1.n}{1.2}$ *S*.E a . (N + I) — $\frac{n-1.n.n+1}{1.2.3}$ *S*.E a . (N + II) + ..

Es sind dies dieselben Ausdrücke, die schon im §. 234 vorkommen, nur mit dem Unterschiede, dafs, was die Coefficienten betrifft, die Formel für die

längste Verbindung nach n, worin A unter q Personen enthalten ist, hier dieselben Coefficienten hat, welche vorher die Formel für die längste Verbindung nach n — 1 unter q — 1 Personen hatte.

Auf eben die Weise findet man auch, da die Alleindauer der Verbindung nach n — 1 unter den q — 1 übrigen Personen $= S.E\,\overline{N-1} - \frac{n}{1} S.E\,\overline{N+1} + \frac{n.n+1}{1.2} S.E\,\overline{N+1} - \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3} S.E\,\overline{N+II}$ etc., die Alleindauer der Verbindung zu n, worin A enthalten ist, $= S.Ea\,\overline{(N-1)} - \frac{n}{1} S.E\,a\,\overline{N} + \frac{n.n+1}{1.2} S.Ea\,\overline{(N+1)} - \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3} \times S.Ea\,\overline{(N+II)} + ..$

Anm. Uebrigens bezeichnet hier $S\,E\,a\,\overline{(N-1)}$ die Summe der mittlern Dauer aller Verbindungen zu n unter den q — 1 Personen, worin A enthalten, wie auch im Texte angegeben worden, folglich werden hier diejenigen Verbindungen zu n unter den q — 1 Personen, worin A nicht mitenthalten ist, nicht mitgerechnet.

Sechstes Kapitel.

Von

Verbindungsrenten

unter mehreren Personen.

§. 237.

Wenn m Personen von gleichem Alter a verbunden sind und das *Absterben der Einzelnen gleichmäfsig* geschieht, so ist der gegenwärtige Werth der Verbindungsrente, die in augenblicklichen Terminen bezahlt werden soll, $= \int \frac{(\alpha - x)^m \, dx}{\alpha^m \, rx}$.

Das Integral $\int (\alpha - x)^m \cdot \frac{dx}{rx}$ ist schon oben im §. 44 litr. b bestimmt; wenn man also den dort angegebenen Werth mit α^m dividirt, so erhält man den Werth der gesuchten Verbindungsrente $= \pi - \frac{m\pi^2}{\alpha} + \frac{m \cdot m-1 \cdot \pi^3}{\alpha^2} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \pi^4}{\alpha^3} + \ldots + \frac{m \cdot m-1 \ldots 1 \cdot \pi^{m+1}}{\alpha^m} (1 - \frac{1}{r\alpha})$.

Der angegebene Werth ist auch $=$

$$\pi - \frac{m\pi}{\alpha} [\pi - \frac{m-1 \cdot \pi^2}{1\alpha} + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot \pi^3}{\alpha^2} - \ldots + \frac{m-1 \cdot m-2 \ldots 1 \cdot \pi^m}{\alpha^{m-1}} (1 - \frac{1}{r\alpha})].$$

Nun ist aber der eingeklammerte Ausdruck nach dem Vorhergehenden $= \int \frac{(\alpha - x)^{m-1}\, dx}{\alpha^{m-1}\, rx}$ $= \lambda\, a^{m-1}$ nach der Hypothese. Hieraus erhält man also eine allgemeine Formel für die Verbindungsrente für Personen von gleichem Alter nach der Hypothese und in Augenblicken zahlbar, nämlich $\lambda\, a^m = \pi - \frac{m\pi}{\alpha}\, \lambda\, a^{m-1}$. Danach wird folglich $\lambda\, a^3 = \pi - \frac{3\pi}{\alpha}\, \lambda a^2$, ferner $\lambda a^2 = \pi - \frac{2\pi}{\alpha}\, \lambda\, a$, imgleichen $\lambda a = \pi - \frac{\pi}{\alpha} \int \frac{dx}{rx}$ (S. §. 75 u. 152).

Noch ist $\lambda\, a^m = \int \frac{(\alpha - x)^m\, dx}{\alpha^m\, rx} =$

$\int \frac{(\alpha - x)\ (\alpha - x)^{m-1}\, dx}{\alpha\ \alpha^{m-1}\, rx} =$

$\int \frac{(\alpha - x)^{m-1}\, dx}{\alpha^{m-1}\, rx} - \frac{1}{\alpha} \int \frac{(\alpha - x)^{m-1}\, x\, dx}{\alpha^{m-1}\, rx}$.

Nun ist $\int \frac{(\alpha - x)^{m-1}\, dx}{\alpha^{m-1}\, rx} = \lambda a^{m-1}$, $\int \frac{(a - x)^{m-1}\, x dx}{\alpha^{m-1}\, rx}$ aber $= L\, a^{m-1}$, d. h. eine nach Verhältnifs der abgelaufenen Zeit steigende Verbindungsrente für $m - 1$ Personen vom Alter a. Folglich ist $\lambda\, a^m = \lambda a^{m-1} - \frac{1}{\alpha}\, L\, a^{m-1}$.

Anm. Der zuerst angegebene Ausdruck, wonach jede höhere Verbindungsrente aus der Verbindungsrente des nächstniedrigern Grades zu berechnen ist, gilt indefsen nur für die

Hypothese, wenn die Personen von gleichem Alter und die Renten in augenblicklichen Terminen zahlbar sind, und ist daher wenig anzuwenden. Will man nach dieser Formel rechnen, und besonders die gefundenen niedern Verbindungsrenten bey Berechnung der höhern zum Grunde legen, so mufs man die Decimaltheile von π und defsen Potenzen mit Genauigkeit bestimmen; sonst wird bey den wiederholten Multiplicationen der durch Abziehung der bejahten und verneinten Theile entstehenden Brüche mit π der Fehler leicht sehr beträchtlich.

Uebrigens ist bey gleichem Absterben die mittlere Verbindungsdauer von $m - 1$ Personen von gleichem Alter $a = \frac{\alpha}{m}$, und dies ist die Gränze der Verbindungsrente, d. h. es ist in jedem Falle $\lambda a^{m-1} < \frac{\alpha}{m}$, folglich auch in jedem Falle $\frac{m}{\alpha} \lambda a^{m-1} < 1$, und es bleibt daher auch $\pi \left(1 - \frac{m}{\alpha} \lambda a^{m-1}\right)$, wie es seyn mufs, immer bejaht.

§. 238.

Wenn wieder bey der Voraufsetzung des gleichmäfsigen Absterbens und bey gleichem Alter a der m Personen die Rente jedesmal am Ende des Jahrs an diejenigen Vereine, welche dann noch bestehen, bezahlt werden soll, so ist der gegenwärtige Werth derselben $= f \frac{(\alpha - n)^m}{\alpha^m r^n}$. Der Werth von $f \frac{(\alpha - n)^m}{r^n}$ ist schon oben §. 43 angegeben; wenn man nun den dortigen Ausdruck mit α^m divi-

dirt, so hat man den Werth der gesuchten Verbindungsrente $= \frac{1}{\alpha^m} [p\alpha^m - p\,r\,(m \int \frac{(\alpha - n)^{m-1}}{r^n} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \int \frac{(\alpha - n)^{m-2}}{r^n} + \ldots + m \int \frac{(\alpha - n)^1}{r^n} + \int \frac{1}{r^n})] = p - \frac{p\,r}{\alpha^m} (m \int \frac{(\alpha - n)^{m-1}}{r^n} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \times \int \frac{(\alpha - n)^{m-2}}{r^n} + \ldots)$, wo n mit 1 anfängt und bis zu α fortgeht.

Da nun $\frac{1}{\alpha^m} \int \frac{(\alpha - n)^m}{r^n} = \lambda\, a_m$, also $\int \frac{(\alpha - n)^m}{r^n} = \alpha^m\, \lambda\, a_m$, so kann man die angegebene Formel auch folgendermafsen ausdrucken:

$\lambda a_m = p - \frac{pr}{\alpha^m} (m\alpha^{m-1}\, \lambda a_{m-1} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \times \alpha^{m-2}\, \lambda\, a_{m-2} + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{m-3}\, \lambda a_{m-3} + \ldots + m\,\alpha\,\lambda\, a^1 + \lambda\, a^0)$, oder $\lambda\, a_m = p - pr (m \frac{\lambda\, a_{m-1}}{\alpha} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\lambda\, a_{m-2}}{\alpha^2} + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\lambda\, a_{m-3}}{\alpha^3} + \ldots + \frac{m \lambda a}{\alpha^{m-1}} + \frac{\lambda\, a^0}{\alpha^m})$, wo $\lambda\, a^0 = \int \frac{1}{r^\alpha}$ ist.

Ferner ist $\frac{(\alpha - 1)^m}{r} = \frac{\alpha\,(\alpha - 1)^{m-1}}{r}$

$$-\frac{1\,(\alpha-1)^{m-1}}{r},\ \frac{(\alpha-2)^m}{r^2}=$$

$$\frac{\alpha\,(\alpha-2)^{m-1}}{r^2}-\frac{2\,(\alpha-2)^{m-1}}{r^2}\text{ etc. so wie}$$

überhaupt $\frac{(\alpha-n)^m}{r^n}=\frac{\alpha\,(\alpha-n)^{m-1}}{r^n}$

$$-\frac{n\,(\alpha-n)^{m-1}}{r^n}.\ \text{Folglich wird}$$

$$\int\frac{(\alpha-n)^m}{r^n}=\frac{\alpha\,(\alpha-1)^{m-1}}{r}+$$

$$\frac{\alpha\,(\alpha-2)^{m-1}}{r^2}+..+\frac{\alpha\,(\alpha-n)^{m-1}}{r^n}-$$

$$\frac{1.(\alpha-1)^{m-1}}{r}-\frac{2.(\alpha-2)^{m-1}}{r^2}-..-$$

$$\frac{n.(\alpha-n)^{m-1}}{r^n}=\alpha\int\frac{(\alpha-n)^{m-1}}{r^n}-$$

$$\int\frac{n\,(\alpha-n)^{m-1}}{r^n},\ \text{und es ist daher auch}$$

$$\int\frac{(\alpha-n)}{\alpha^m\ r^n}=\frac{\alpha}{\alpha^m}\int\frac{(\alpha-n)^{m-1}}{r^n}-$$

$$\int\frac{n\,(\alpha-n)^{m-1}}{\alpha^m\ r^n}=\frac{1}{\alpha^{m-1}}\left[\int\frac{(\alpha-n)^{m-1}}{r^n}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha}\int\frac{n\,(\alpha-n)^{m-1}}{r^n}\right].\ \text{Da nun}$$

$\int\frac{(\alpha-n)^{m-1}}{\alpha^{m-1}\ r^n}$ die Verbindungsrente für m—1 Personen vom Alter a, und $\int\frac{n\,(\alpha-n)^{m-1}}{\alpha^{m-1}\ r^n}$ die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen zunehmende Verbindungsrente für dieselben Personen,

so ist auch hier $\lambda\, am = \lambda\, am-1 - \frac{1}{\alpha} L\, am-1$,

wonach man also die Verbindungsrente für den Grad m aus der einfachen und der nach der natürlichen Ordnung der Zahlen steigenden Verbindungsrente des Grades m — 1 findet.

§. 239.

Nach §. 209 vorher ist die Correction für die Verbindungsdauer, auf ganze Jahre berechnet, nach jeder Sterbensordnung ohne Unterschied $=$

$$\frac{\int' {}^{1}\mathfrak{P}}{2\,AB\,..\,K} + \frac{\int' {}^{1}\mathfrak{Q}}{3\,AB\,..\,K} + \frac{\int' {}^{1}\mathfrak{R}}{4\,AB\,..\,K} + \,.\,.,$$

wo ${}^{1}\mathfrak{P}$ die Summe der Verbindungen nach m — 1, ${}^{1}\mathfrak{Q}$ die Summe der Verbindungen nach m — 2, imgleichen ${}^{1}\mathfrak{R}$ die Summe der Verbindungen nach m — 3 unter den m Personen von der Altersergänzung α — 1, jede Summe mit den zugehörigen Decrementen multiplicirt, die jedoch hier alle $=$ 1 sind, auch $\int' {}^{1}\mathfrak{P}$, $\int' {}^{1}\mathfrak{Q}$, $\int' {}^{1}\mathfrak{R}$ etc. die Reihen dieser Summen für alle Jahre bezeichnen, und danach wäre die Correction für die Verbindungsdauer im gegenwärtigen Falle $=$

$$\frac{m}{2} \frac{\int (\alpha - n)^{m-1}}{\alpha^m} + \frac{m.m-1}{2.3} \frac{\int (\alpha - n)^{m-2}}{\alpha^m} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3.4} \int \frac{(\alpha - n)^{m-3}}{\alpha^m} + \,..$$

Sollte also die Verbindungsrente für jeden Zeittheil,

während defsen die im Laufe jedes Jahrs aufgelöseten Vereine noch bestehen, jedoch am Ende des Jahrs, bezahlt werden, so wäre die Correction für den im vorhergehenden §. angegebenen Werth der

$$\text{Rente} = \frac{1}{\alpha^m}\left[\frac{m}{2}\int\frac{(\alpha-n)^{m-1}}{rn} + \frac{m.m-1}{2.3}\int\frac{(\alpha-n)^{m-2}}{rn} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3.4}\int\frac{(\alpha-n)^{m-3}}{rn} + \ldots + \int\frac{(\alpha-n)^1}{rn} + \frac{1}{m+1}\int\frac{1}{rn}\right],$$

wo wieder n von 1 bis zu α fortgeht, oder es ist die gesuchte Correction auch

$$= \frac{m}{2}\cdot\frac{\lambda a^{m-1}}{\alpha} + \frac{m.m-1}{2.3}\cdot\frac{\lambda a^{m-2}}{\alpha^2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3.4}\cdot\frac{\lambda a^{m-3}}{\alpha^3} + \ldots + \frac{\lambda a}{\alpha^{m-1}} + \frac{\lambda a^0}{(m+1)\alpha^m}.$$

Ex. Für $m = 2$ erhielte man also hienach die Correction $= \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\frac{(\alpha-n)^1}{rn} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{rn}\right] = \frac{\lambda a}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha^2}\int\frac{1}{r\alpha}$, [welches man, da $\lambda a^2 = p - 2pr\frac{\lambda a}{\alpha} - \frac{pr}{\alpha^2}\int\frac{1}{r\alpha}$ (§. 238), also $\frac{\lambda a}{\alpha} = \frac{1}{2r} - \frac{\lambda a^2}{2pr} - \frac{1}{2\alpha^2}\int\frac{1}{r\alpha}$

ist, auch durch $\frac{1}{2r} - \frac{\lambda a^2}{2 p r} - \frac{1}{2\alpha^2} \int \frac{1}{r\alpha}$

$+ \frac{1}{3\alpha^2} \int \frac{1}{r\alpha} = \frac{1}{2} \vartheta a^2 - \frac{1}{6\alpha^2} \int \frac{1}{r\alpha}$ (§. 151) ausdrucken kann]. Setzte man $\alpha = 1$, d. h. suchte man den Werth der Correction für das letzte Jahr der Altersergänzung, so erhielte man denselben $= \frac{1}{3r}$, welches für diesen Fall der vollständige Werth der Verbindungsrente wäre.

§. 240.

Wenn ferner nach der Hypothese der gegenwärtige Werth der in augenblicklichen Terminen zahlbaren Verbindungsrente für m Personen von verschiedenem Alter, eine vom Alter a, eine zweite vom Alter b, die dritte vom Alter c etc. bis k, wozu die Altersergänzungen α, β, γ bis $\varkappa$ gehören mögen, gesucht wird, so ist der Werth $=$

$$\frac{1}{\alpha \beta \gamma \ldots \varkappa} \int (\alpha - x)\,(\beta - x) \ldots (\varkappa - x) \frac{dx}{rx}.$$

Das Product der m zweitheiligen Factoren ist $=$ $\alpha \beta \gamma \ldots \varkappa - P x + Q x^2 - R x^3 + \ldots \mp x^m$, wo P wieder die Summe aller Verbindungen nach m — 1 unter den m Zahlen α, $\beta \ldots \varkappa$, Q die Summe aller Verbindungen nach m — 2, R die Summe der Verbindungen nach m — 3 etc. unter den

nämlichen Zahlen ist. Hiernach erhält man den Werth der Verbindungsrente =

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa}\left[\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa\int\frac{dx}{rx} - P\int x\,\frac{dx}{rx}\right.$$

$$+ Q\int x^2\,\frac{dx}{rx} - R\int x^3\,\frac{dx}{rx} + \,..\,\mp$$

$$\left.\int\frac{x^m\,dx}{rx}\right],$$

wo man das Integral jedes Theils nach §. 42 finden kann und nach der Integration x der kleinsten Altersergänzung gleich setzen mufs.

Wenn man den zuletzt angeführten Ausdruck durch $\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa$ dividirt, so kann man die Verbindungsrente auch ausdrucken durch

$$\int\frac{dx}{rx} - \mathfrak{p}\int\frac{x\,dx}{rx} + \mathfrak{q}\int\frac{x^2\,dx}{rx} -$$

$$\mathfrak{r}\int\frac{x^3\,dx}{rx} + \,..\,\mp\,\mathfrak{z}\int\frac{x^m\,dx}{rx},$$

wo $\mathfrak{p}$ gleich der Summe von Brüchen, derer jeder 1 zum Zähler und je eine der Zahlen α, β, γ, .. $\varkappa$ zum Nenner, $\mathfrak{q}$ die Summe von Brüchen, deren jeder 1 zum Zähler und ein Product von je zwey der genannten Zahlen zum Nenner hat, $\mathfrak{r}$ die Summe von Brüchen, deren jeder 1 zum Zähler und ein Product von je drey der angegebenen Zahlen zum Nenner hat etc., im letzten Gliede ist $\mathfrak{z} =$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma\,..\,\varkappa}.$$

Noch hat man $\int\frac{(\alpha-x)\,(\beta-x)\,..\,(\varkappa-x)\,dx}{\alpha\beta\,..\,\varkappa}\,\frac{}{rx}$

$$= \int \frac{\alpha\ (\beta - x)\ ..\ (\varkappa - x)\ dx}{\alpha \quad \beta \quad .. \quad \varkappa \quad rx} -$$

$$\int \frac{x\ (\beta - x)\ ..\ (\varkappa - x)\ dx}{\alpha \quad \beta \quad .. \quad \varkappa \quad rx} =$$

$$\int \frac{(\beta - x)\ ..\ (\varkappa - x)\ dx}{\beta \quad .. \quad \varkappa \quad rx} -$$

$$\frac{1}{\alpha} \int \frac{(\beta - x)\ ..\ (\varkappa - x)\ x\ dx}{\beta \quad .. \quad \varkappa \quad rx}.$$

Es ist aber $\int \frac{(\beta - x)\ ..\ (\varkappa - x)\ dx}{\beta \quad .. \quad \varkappa \quad rx}$ die Verbindungsrente für die m — 1 Personen B C .. K; $\int \frac{(\beta - x)\ ..\ (\varkappa - x)\ x\,dx}{\beta \quad .. \quad \varkappa \quad rx}$ aber ist eine nach Verhältnifs der abgelaufenen Zeit steigende Verbindungsrente für dieselben Personen. Folglich wird auch $\lambda\,\overline{a\,b\,c\,..\,k} = \lambda\,\overline{b\,c\,..\,k} - \frac{1}{\alpha}\,L\,\overline{b\,c\,..\,k}$.

Anm. Man mufs aber auch hier nicht übersehen, dafs die hier angegebene Verbindungsrente L b c .. k im ersten Jahre mit o anfängt und continuirlich bis zu 1 steigt, im zweiten Jahre continuirlich bis zu 2 wächst etc., dafs sie also nicht einer jährlich nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Rente gleich zu setzen ist.

§. 241.

Wenn noch nach derselben Hypothese gerechnet wird, und wieder m Personen von verschiedenem Alter, nämlich a, b, c bis k, verbunden sind,

die Renten aber am Ende des Jahrs an diejenigen Vereine, welche dann noch bestehen, bezahlt werden sollen, so ist der gegenwärtige Werth der Verbindungsrente oder $\lambda\ \overline{a\ b\ c\ \ldots\ k} =$

$$\frac{1}{\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\varkappa}\int\frac{(\alpha-n)\,(\beta-n)\,(\gamma-n)\,\ldots\,(\varkappa-n)}{r^n}$$

Nun ist $(\alpha - n)\,(\beta - n)\,(\gamma - n)\,\ldots\,(\varkappa - n) =$ $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots - P n + Q n^2 - R n^3 + \ldots \mp n^m$, wo wieder P die Summe aller Verbindungen nach $m - 1$ unter den m Zahlen α, β, $\gamma\ \ldots\ \varkappa$, Q die Summe der Verbindungen nach $m - 2$ unter den nämlichen Zahlen etc. Folglich erhält man

$$\lambda\ \overline{a\ b\ c\ \ldots\ k} = \frac{1}{\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\varkappa}\left(\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\varkappa\int\frac{n^0}{r^n}\right.$$

$$- P\int\frac{n^1}{r^n} + Q\int\frac{n^2}{r^n} - R\int\frac{n^3}{r^n} +$$

$$\left.\ldots\ \mp\int\frac{n^m}{r^n}\right),$$ wo man n der kleinsten Altersergänzung gleich setzen mufs und den Werth jedes Gliedes nach §. 39 findet.

Für drey Personen vom Alter a, b, c, wovon c das ältste seyn mag, wäre also hienach $\lambda\ \overline{a\ b\ c} =$

$$\frac{1}{\alpha\,\beta\,\gamma}\left(\alpha\,\beta\,\gamma\int\frac{\gamma^0}{r\gamma} - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\int\frac{\gamma^1}{r\gamma}\right.$$

$$\left. + (\alpha + \beta + \gamma)\int\frac{\gamma^2}{r\gamma} - \int\frac{\gamma^3}{r\gamma}\right) = \int\frac{1}{r\gamma}$$

$$-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{\gamma^{r}}{r\gamma}+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)\int\frac{\gamma^{2}}{r\gamma}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int\frac{\gamma^{3}}{r\gamma}.$$

Für vier Personen vom Alter a, b, c, d, wovon d das älteste, hat man $\lambda\,\overline{a\,b\,c\,d}=\int\frac{\delta^{0}}{r\delta}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)\int\frac{\delta^{1}}{r\delta}+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\delta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\delta}+\frac{1}{\gamma\delta}\right)\int\frac{\delta^{2}}{r\delta}-\left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\delta}+\frac{1}{\alpha\gamma\delta}+\frac{1}{\beta\gamma\delta}\right)\int\frac{\delta^{3}}{r\delta}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}\int\frac{\delta^{4}}{r\delta}.$

Auch hier erhält man übrigens auf die nämliche Weise, wie im §. 238 gezeigt worden, $\lambda\,\overline{a\,b\,c\,..\,k}=\lambda\,\overline{b\,c\,..\,k}-\frac{1}{\alpha}\,L\,\overline{\underset{\alpha}{b}\,c\,..\,k}$.

Aufserdem hat man noch, wenn man $\alpha-1$ mit α', $\beta-1$ mit β', $\alpha-2$ mit α'', $\beta-2$ mit β'' etc. bezeichnet, $(r-1)\,\alpha\beta\gamma\varkappa.\lambda\,\overline{a\,b\,c\,k}=\left\{\frac{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\varkappa'}{r^{0}}+\frac{\alpha''\,\beta''\,\gamma''\,\varkappa''}{r}+\frac{\alpha'''\,\beta'''\,\gamma'''\,\varkappa'''}{r^{2}}-\frac{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\varkappa'}{r}-\frac{\alpha''\,\beta''\,\gamma''\,\varkappa''}{r^{2}}\right\}=$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + \ldots + \dfrac{\alpha^{\varkappa}\ \beta^{\varkappa}\ \gamma^{\varkappa}\ \varkappa^{\varkappa}}{\mathfrak{r}^{\varkappa-1}} \\ - \ldots - \dfrac{\alpha^{\varkappa-1}\ \beta^{\varkappa-1}\ \gamma^{\varkappa-1}\ \varkappa^{\varkappa-1}}{\mathfrak{r}^{\varkappa-1}} - \dfrac{\alpha^{\varkappa}\ \beta^{\varkappa}\ \gamma^{\varkappa}\ \varkappa^{\varkappa}}{\mathfrak{r}^{\varkappa}} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa\ -\ \Delta\ (\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa)}{\mathfrak{r}^{0}} -$$

$$\frac{\Delta\ (\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \varkappa')}{\mathfrak{r}^{1}} - \frac{\Delta\ (\alpha''\ \beta''\ \gamma''\ \varkappa'')}{\mathfrak{r}^{2}} - \ldots =$$

$\alpha\beta\gamma\varkappa - \int \frac{\Delta\ (\alpha^{0}\ \beta^{0}\ \gamma^{0}\ \varkappa^{0})}{\mathfrak{r}^{0}}$, folglich $\lambda(abck) =$

$$\frac{1}{\mathfrak{r}-1}\left(\frac{\alpha\beta\gamma\varkappa}{\alpha\beta\gamma\varkappa} - \int \frac{\Delta\ (\alpha^{0}\ \beta^{0}\ \gamma^{0}\ \varkappa^{0})}{\mathfrak{r}^{0}\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa}\right)$$

$= p\,(1 - \int \frac{\Delta\ (\alpha^{0}\ \beta^{0}\ \gamma^{0}\ \varkappa^{0})}{\mathfrak{r}^{0}\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa})$. Da nun ferner $\Delta\ (\alpha^{0}\ \beta^{0}\ \gamma^{0}\ \varkappa^{0}) = (\alpha' + 1)\ (\beta' + 1)\ (\gamma' + 1)\ (\varkappa' + 1) - \alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \varkappa' =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'\ \beta'\ \gamma' \\ \alpha'\ \beta'\ \varkappa' \\ \alpha'\ \gamma'\ \varkappa' \\ \beta'\ \gamma'\ \delta' \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \alpha'\ \beta' \\ \alpha'\ \gamma' \\ \alpha'\ \varkappa' \\ \beta'\ \gamma' \\ \beta'\ \varkappa' \\ \gamma'\ \varkappa' \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \varkappa' \end{array} \right\} + 1,$$

imgleichen $\Delta\ (\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \varkappa') = (\alpha'' + 1)\ (\beta'' + 1)\ (\gamma'' + 1)\ (\varkappa'' + 1) - \alpha''\ \beta''\ \gamma''\ \varkappa'' =$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha''\ \beta''\ \gamma''\\ \alpha''\ \beta''\ \varkappa''\\ \alpha''\ \gamma''\ \varkappa''\\ \beta''\ \gamma''\ \varkappa''\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}\alpha''\ \beta''\\ \alpha''\ \gamma''\\ \alpha''\ \varkappa''\\ \beta''\ \gamma''\\ \beta''\ \varkappa''\\ \gamma''\ \varkappa''\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\\ \varkappa''\end{matrix}\right\}+1,$$

etc., auch $\frac{\alpha'\ \beta'\ \gamma'}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa\ r^0}+\frac{\alpha''\ \beta''\ \gamma''}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa\ r}+$

$..=\frac{r}{\varkappa}\ \lambda\ a\ b\ \overline{c\ \varkappa,}$, so wie $\frac{\alpha'\ \beta'\ \varkappa'}{\alpha\beta\gamma\varkappa\ r^0}+$

$\frac{\alpha''\ \beta''\ \varkappa''}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa\ r^1}+..=\frac{r}{\gamma}\ \lambda\ \overline{abk}$ etc.

etc., ferner $\frac{\alpha'\ \beta'}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa\ r^0}+\frac{\alpha''\ \beta''}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa\ r^1}+$

$..=\frac{r}{\gamma\varkappa}\ \lambda\ \overline{a\ b\ \varkappa,}$, imgleichen $\frac{\alpha'\ \gamma'}{\alpha\beta\gamma\varkappa\ r^0}+\frac{\alpha''\ \gamma''}{\alpha\beta\gamma\varkappa\ r^1}$

$+..=\frac{r}{\beta\varkappa}\ \lambda\ \overline{a\ c\ \varkappa,}$, etc., so wird $\lambda\ a\ b\ c\ k=$

$$p\ [1-r\ (\frac{\lambda\ \overline{a\ b\ c\ \varkappa,}}{\varkappa}+\frac{\lambda\ \overline{a\ b\ k}}{\gamma}+$$

$$\frac{\lambda\ \overline{a\ c\ k}}{\beta}+\frac{\lambda\ \overline{b\ c\ k}}{\alpha}+\frac{\lambda\ \overline{a\ b\ \varkappa,}}{\gamma\ \varkappa}+$$

$$\frac{\lambda\ \overline{a\ c\ \varkappa,}}{\beta\ \varkappa}+\frac{\lambda\ \overline{a\ k}}{\beta\ \gamma}+\frac{\lambda\ \overline{b\ c\ \varkappa,}}{\alpha\ \varkappa}+$$

$$\frac{\lambda\ b\ k}{\alpha\ \gamma}+\frac{\lambda\ c\ k}{\alpha\ \beta}+\frac{\lambda\ \overline{a\ \varkappa,}}{\beta\gamma\varkappa}+\frac{\lambda\ \overline{b\ \varkappa,}}{\alpha\ \gamma\ \varkappa}$$

$$+\frac{\lambda\ \overline{c\ \varkappa,}}{\alpha\ \gamma\ \varkappa}+\frac{\lambda\ \varkappa}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\lambda\ \varkappa^0}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa})\ ].$$

Vermittelst dieser Formel könnte man jede Verbindungsrente unter m Personen durch alle mit dem Jahre $\varkappa$ aufhörende Renten für die Verbindungen zu m — 1, m — 2 etc., die Verbindungen zu o, d. i. die Zeitrenten, mitgerechnet, zusammensetzen. Indefsen ist diese Formel nur auf die Sterbensordnung, deren Decremente alle gleich sind, anwendbar.

§. 242.

Sollten bey der hypothetischen Sterbensordnung die Renten auch für die im Laufe jedes Jahrs aufgelöseten Vereine, jedoch nach Verhältnifs der Zeit, die sie noch bestanden haben, und *am Ende des Jahrs* bezahlt werden, so hat man aus §. 209 die Correction für die Verbindungsdauer $=$

$$\frac{\int' {}^{1}\mathfrak{P}}{2\,AB\,..\,K} + \frac{\int' {}^{1}\mathfrak{Q}}{3\,AB\,..\,K} + \frac{\int' {}^{1}\mathfrak{R}}{4\,AB\,..\,K} + ..$$

Da nun ${}^{1}\mathfrak{P} =$ der Summe der Verbindungen nach m — 1 unter den Zahlen $A^{1}\,B^{1}\,..\,K^{1}$, ${}^{1}\mathfrak{Q} =$ der Summe der Verbindungen nach m — 2 unter denselben Factoren etc., jede mit den zugehörigen Decrementen multiplicirt, nach der Hypothese aber alle Decremente $= 1$ sind, so ist hier ${}^{1}\mathfrak{P}$ gleich der Summe der Verbindungen nach m — 1 unter den Factoren $\overline{\alpha - 1}$, $\overline{\beta - 1}$, $\overline{\gamma - 1}$, .. $\overline{\varkappa - 1}$ etc., ${}^{1}\mathfrak{Q}$ gleich der Summe der Verbindungen nach m — 2 unter denselben Factoren, etc. sowie ${}^{2}\mathfrak{P} =$ gleich der Summe der Verbindungen

nach m — 1 unter den Factoren $\overline{\alpha - 2}$, $\overline{\beta - 2}$, $\overline{\gamma - 2}$, .. $\overline{\varkappa - 2}$, $^{2}\mathfrak{Q}$ gleich der Summe der Verbindungen nach m — 2 unter diesen Factoren etc. Druckt man diese Summen bis zum nten Gliede durch $\int^{n}\overline{\mathfrak{P}}$, $\int^{n}\overline{\mathfrak{Q}}$ etc. aus, so erhält man die Correction für die Verbindungsrente $\lambda\ \overline{a\ b\ c\ ..\ k} =$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma..\varkappa}\left[\tfrac{1}{2}\int\frac{\overline{\mathfrak{P}}^{n}}{rn}+\tfrac{1}{3}\int\frac{\overline{\mathfrak{Q}}^{n}}{rn}+\tfrac{1}{4}\int\frac{\overline{\mathfrak{R}}^{n}}{rn}+..+\frac{1}{m+1}\int\frac{1}{rn}\right),$$

wo n von 1 an bis zur kleinsten Altersergänzung fortgeht.

Für m = 2 wird also hienach die Correction =

$$\frac{1}{\alpha\beta}\left(\tfrac{1}{2}\int\frac{(\alpha-n)}{rn}+\tfrac{1}{2}\int\frac{(\beta-n)}{rn}+\tfrac{1}{2}\int\frac{1}{rn}\right).$$

Für m = 3 wäre die Correction =

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left(\tfrac{1}{2}\int\frac{(\alpha-n)(\beta-n)}{rn}+\tfrac{1}{2}\int\frac{(\alpha-n)(\gamma-n)}{rn}+\tfrac{1}{2}\int\frac{(\beta-n)(\gamma-n)}{rn}+\tfrac{1}{3}\int\frac{(\alpha-n)}{rn}+\tfrac{1}{3}\int\frac{(\beta-n)}{rn}+\tfrac{1}{3}\int\frac{(\gamma-n)}{r}+\tfrac{1}{4}\int\frac{1}{rn}\right).$$

Anm. Es läfst sich jedoch diese Correction durch die unten anzugebende allgemeine Formel für jede Sterbensordnung bequemer ausdrucken,

§. 243

Wenn ferner wieder anfänglich m Personen, eine vom Alter a, eine vom Alter b etc. bis zum Alter k, welches das höchste seyn mag, verbunden sind, und A, B bis K die dazu gehörigen Anfangszahlen der Lebenden bezeichnen, so ist *nach jeder Sterbensordnung ohne Unterschied* die am Ende des Jahrs, und zwar an die dann noch bestehenden vollzähligen Vereine, zahlbare Verbindungsrente

$$\text{oder } \lambda\,\overline{\text{abc..k}} = \frac{1}{\overline{\text{ABC..K}}}\left(\frac{A^1 B^1 C^1 \ldots K^1}{r} + \frac{A^2 B^2 C^2 \ldots K^2}{r^2} + \ldots + \frac{A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} C^{\overline{x}} \ldots K^{\overline{x}}}{r^x}\right),$$

wo x die Altersergänzung für k ist.

Nun ist *zuerst* $(r-1)\,\text{ABC..K}.\lambda\,\overline{\text{abc..k}} =$

$$\frac{A^1 B^1 \ldots K^1}{r^0} + \frac{A^2 B^2 \ldots K^2}{r^1} + \frac{A^3 B^3 \ldots K^3}{r^2} - \frac{A^1 B^1 \ldots K^1}{r^1} - \frac{A^2 B^2 \ldots K^2}{r^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} \ldots K^{\overline{x}}}{r^{x-1}} - \ldots - \frac{A^{\overline{x-1}} B^{\overline{x-1}} \ldots K^{\overline{x-1}}}{r^{x-1}} + \frac{A^{\overline{x}} B^{\overline{x}} \ldots K^{\overline{x}}}{r^x}$$

$$= \frac{\text{AB..K}}{r^0} - \frac{\Delta\,(\text{AB..K})}{r^0} - \frac{\Delta\,(A^1 B^1 \ldots K^1)}{r^1} - \frac{\Delta\,(A^2 B^2 \ldots K^2)}{r^2} -$$

$\ldots - \frac{\Delta\,(A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,..\,K^{\overline{x}})}{r^x}$, welches letzte Glied $= 0$ ist. Folglich hat man $\lambda\,\overline{a\,b\,c\,..\,k} =$

$$\frac{1}{r-1}\left(\frac{A\,B\,..\,K}{A\,B\,..\,K} - \frac{\Delta\,(A\,B\,..\,K)}{A\,B\,..\,K} - \frac{\Delta\,(A^1\,B^1\,..\,K^1)}{A\,B\,..\,K\,r^1} - \frac{\Delta\,(A^2\,B^2\,..\,K^2)}{A\,B\,..\,K\,r^2} - \ldots\right) = p\,\left[1 - \int \frac{\Delta\,(A^0\,B^0\,..\,K^0)}{A\,B\,..\,K\,r^0}\right).$$

Danach ist also $\lambda\,a = p\,(1 - \int \frac{\Delta\,A^0}{A r^0})$, $\lambda\,\overline{ab} =$

$p\,[1 - \int \frac{\Delta\,(A^0\,B^0)}{A\,B\,r^0}]$, so wie $\lambda\,\overline{a\,b\,c} =$

$p\,[1 - \int \frac{\Delta\,(A^0\,B^0\,C^0)}{A\,B\,C\,r^0}]$ etc. (Vergleiche §. 64 und 143).

§. 244.

Es ist *ferner* $\lambda\,\overline{a\,b\,c\,..\,k}$, oder

$$\frac{1}{ABC\,..\,K}\left(\frac{A^1\,B^1\,C^1\,..\,K^1}{r^1} + \frac{A^2\,B^2\,C^2\,..\,K^2}{r^2} + \frac{A^3\,B^3\,C^3\,..\,K^3}{r^3} + \ldots\right) =$$

$$\frac{1}{ABC\,..\,K}\left[\frac{(A - \Delta A)\,B^1\,C^1\,..\,K^1}{r} + \frac{(A - \Delta A - \Delta A^1)\,B^2\,C^2\,..\,K^2}{r^2} + \right.$$

$$\frac{(A - \Delta A - \Delta A^{1} - \Delta A^{2})\, B^{1} C^{1} \ldots K^{1}}{r^{1}}$$

$+ \ldots]$. Also ist $\lambda\, \overline{a\, b\, c \ldots k} = \int \frac{B'^{1} C'^{1} \ldots K'^{1}}{BC \ldots K\, r^{1}}$

$$- \frac{\Delta A}{A} \int \frac{B'^{1} C'^{1} \ldots K'^{1}}{BC \ldots K\, r^{1}} - \frac{\Delta A^{1}}{A} \int \frac{B'^{2} C'^{2} \ldots K'^{2}}{BC \ldots K\, r^{2}}$$

$$- \frac{\Delta A^{2}}{A} \int \frac{B'^{3} C'^{3} \ldots K'^{3}}{BC \ldots K\, r^{3}} - \ldots,$$ wo

$\int \frac{B'^{1} \ldots K'^{1}}{B \ldots K\, r^{1}}, \int \frac{B'^{2} \ldots K'^{2}}{B \ldots K\, r^{2}}$ etc. Verbindungsrenten vom Grade $m - 1$ für die Personen BC..K sind, und zwar $\int \frac{B'^{1} \ldots K'^{1}}{B \ldots K\, r^{1}}$ die gleich laufende, $\int \frac{B'^{2} \ldots K'^{2}}{B \ldots K\, r^{2}}$ die um 1 Jahr, $\int \frac{B'^{3} \ldots K'^{3}}{B \ldots K\, r^{3}}$ die um 2 Jahr aufgeschobene Verbindungsrente. Man hat also hienach $\lambda\, \overline{a\, b\, c \ldots k} = \lambda\, \overline{b\, c \ldots k} -$

$$\frac{\Delta A}{A} \lambda\, \overline{b\, c \ldots k} - \frac{\Delta A^{1}}{A} \lambda\, \overline{\overline{b\, c \ldots k}'^{2}} -$$

$$\frac{\Delta A^{2}}{A} \lambda\, \overline{\overline{b\, c \ldots k}'^{3}} - \ldots$$ (Vergl. §. 66 Anm. 2 und §. 144).

Noch ist $\frac{A^{1} B^{1} C^{1} \ldots K^{1}}{ABC \ldots K\, r} + \frac{A^{2} B^{2} C^{2} \ldots K^{2}}{ABC \ldots K\, r^{2}}$

$$+ \frac{A^{3} B^{3} C^{3} \ldots K^{3}}{ABC \ldots K\, r^{3}} + \ldots =$$

$$\frac{[AB - \Delta(AB)]\, C^{1} \ldots K^{1}}{ABC \ldots K\, r^{1}} +$$

$$\frac{[AB - \Delta(AB) - \Delta(A^1B^1)]\, C^2 \,..\, K^2}{A\,B\,C\;..\;K\,r^2} +$$

$$\frac{[AB - \Delta(AB) - \Delta(A^1B^1) - \Delta(A^2B^2)]\, C^3 \,..\, K^3}{A\,B\,C\;..\;K\,r^3}$$

$$+ \,.. = \int \frac{C'^1 \,..\, K'^1}{C\,..\,K\,r^1} - \frac{\Delta(AB)}{AB} \int \frac{C'^1 \,..\, K'^1}{C\,..\,K\,r^1}$$

$$- \frac{\Delta(A^1B^1)}{A\;\;B} \int \frac{C'^2 \;\;..\;\; K'^2}{C\;\;..\;\;K\;\;r^2} -$$

$$\frac{\Delta(A^2B^2)}{A\,B} \int \frac{C'^1 \,..\, K'^1}{C\,..\,K\,r^3} - \,..$$

Da nun hier wieder $\int \frac{C'^1 \,..\, K'^1}{C\,..\,K\,r^1}$ die sofortlaufende Verbindungsrente für die m — 2 Personen C .. K, $\int \frac{C'^2 \,..\, K'^2}{C\,..\,K\,r^2}$ die um 1 Jahr so wie $\int \frac{C'^1 \,..\, K'^1}{C\,..\,K\,r^3}$ die um 2 Jahr aufgeschobene Verbindungsrente für die nämlichen Personen ist, so hat man auch $\lambda\, \overline{a\,b\,c\,..\,k}$

$$= \lambda\, \overline{c\,..\,k} - \frac{\Delta(AB)}{A\;\;B}\, \lambda\, \overline{c\,..\,k} - \frac{\Delta(A^1B^1)}{A\;\;B} \times$$

$$\lambda\, \overline{c\,..\,k}^{'2} - \frac{\Delta(A^2B^2)}{A\;\;B}\, \lambda\, \overline{c\,..\,k}^{'3} - \,..,$$

wo also die Verbindungsrente für m Personen aus den Verbindungsrenten für m — 2 Personen gefunden wird. (Vergl. 208).

Auf die nämliche Weise kann man die Verbindungsrente für m Personen durch die Verbindungsrenten für m — u Personen ausdrucken; man mufs aber dann die *Decremente der bestehenden Verbindungen* unter den übrigen u Personen

berechnen. Wenn übrigens x die Altersergänzung der ältsten Person ist, so ist in allen diesen Fällen

$$\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,..\,K^{\overline{x}}}{A\,B\,C\,..\,K\,r^x} \text{ oder auch } \frac{\Delta\,(A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,..)}{A\;B\;..} \times \int \frac{C^{\overline{x}}\,..\,K^{\overline{x}}}{C\,..\,K\,r^x} \text{ das letzte Glied.}$$

Anm. Wenn man auf diesem Wege immer weiter fortginge, so wäre der letzte Ausdruck, den man fände,

$$\lambda\,\overline{abc\,..\,k} = \int \frac{1}{r^x} - \frac{\Delta\,(AB\,..\,K)}{AB\,..\,K} \int \frac{1}{r^x} - \frac{\Delta\,(A^1\,B^1\,..\,K^1)}{AB\,..\,K} \int \frac{1'^2}{r^2} - \frac{\Delta\,(A^2\,B^2\,..\,K^2)}{AB\,..\,K} \int \frac{1'^3}{r^3} - \text{etc., wo nämlich}$$

$$\int \frac{1}{r^x} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + .. + \frac{1}{r^x}, \int \frac{1'^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + .. + \frac{1}{r^x} \text{ etc.}$$

Diese Formel ist in Ansehung der Summen von $\frac{1}{r^x}$ bequem genug; sie erfordert aber zugleich die Decremente der bestehenden Verbindungen nach m, welche mühsam zu berechnen sind. Sonst könnte man diese Formel noch ausdrucken durch $\lambda\,\overline{abc\,..\,k} =$

$$\frac{\Delta\,(A^1\,B^1\,..\,K^1)}{AB\,..\,K} \int \frac{1}{r^1} + \frac{\Delta\,(A^2\,B^2\,..\,K^2)}{AB\,..\,K} \int \frac{1}{r^2} + \frac{\Delta\,(A^3\,B^3\,..\,K^3)}{AB\,..\,K} \int \frac{1}{r^3} + .. +$$

$$\frac{\Delta\,(A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,..\,K^{\overline{x-1}})}{AB\,..\,K}\int\frac{1}{r^{x-1}}$$, wo alle Summen mit $\frac{1}{r}$ anfangen und mit der bezeichneten Gränze aufhören. Es ist nämlich

$$\int\frac{1}{r^x}=\frac{AB\,..\,K}{AB\,..\,K}\int\frac{1}{r^x}=$$

$$\frac{\Delta\,(AB\,..\,K)}{AB\,..\,K}\int\frac{1}{r^x}+\frac{\Delta\,(A^1B^1\,..\,K^1)}{AB\,..\,K}\int\frac{1}{r^1}$$

$$+\frac{(\Delta A^1B^1\,..\,K^1)}{AB\,..\,K}\int\frac{1'^2}{r^2}+\frac{\Delta\,(A^2B^2\,..\,K^2)}{AB\,..\,K}\int\frac{1}{r^2}$$

$$+\frac{\Delta\,(A^2B^2\,..\,K^2)}{AB\,..\,K}\int\frac{1'^1}{r^1}+..,\text{ folglich}$$

$$\int\frac{1}{r^x}-\frac{\Delta\,(AB\,..\,K)}{AB\,..\,K}\int\frac{1}{r^x}-$$

$$\frac{\Delta\,(A^1B^1\,..\,K^1)}{AB\,..\,K}\int\frac{1'^2}{r^2}-\frac{\Delta\,(A^2B^2\,..\,K^2)}{AB\,..\,K}\int\frac{1'^1}{r^1}$$

$$-..=\frac{\Delta\,(A^1B^1\,..\,K^1)}{AB\,..\,K}\int\frac{1}{r^1}+$$

$$\frac{\Delta\,(A^2B^2\,..\,K^2)}{AB\,..\,K}\int\frac{1}{r^2}+..$$

Auf ähnliche Art könnte man die in diesem §. angeführten Formeln durch die aufhörenden, anstatt der aufgeschobenen, niedern Verbindungsrenten ausdrucken; man würde aber dadurch in der Berechnung keine Erleichterung erhalten.

Anm, 2. Bey der Anwendung kömmt es darauf an, welche von den hier in den §. §. 243 und 244 angegebenen Formeln die bequemste sey. Die Ausdrücke im §. 244 haben so viel Glieder als die kleinste Altersergänzung Einheiten hat, und jedes Glied ist ein Product aus den Decrementen der Lebenden oder der Verbindungen in eine aufgeschobene Ver-

bindungs-, Leib- oder Zeitrente. Jedes Glied erfordert also, in so weit man nicht die Decremente der Lebenden unmittelbar aus der Mortalitätstafel nehmen kann, die Berechnung der Decremente und die Multiplication in die aufgeschobenen Verbindungs-, Leib- oder Zeitrenten, die man vermuthlich auch erst vorher berechnen mufs.

Bey der im §. 243 angegebenen Formel $\lambda\,\overline{abc\,..\,k} = p\,(1 - f\frac{\Delta\,(A^{o}\,B^{o}\,..\,K^{o})}{AB\,..\,K\,r^{o}})$ kann man den letzteren Theil nicht anders finden, als dadurch, dafs man entweder jedes Decrement aus den niedern Verbindungen und Decrementen zusammensetzt, oder dafs man die Zahlen der Verbindungen zu m für alle auf einanderfolgende Jahre berechnet und jede von der vorhergehenden abzieht, wodurch die Berechnung vermittelst der Logarithmen, wenn man diese gebrauchen will, vervielfältigt wird.

Zwar könnte man bey allen diesen Formeln anstatt der Decremente die Differenzen derselben gebrauchen; dann hätte man aber überall noch mehr Theile, eine Summirung der Verbindungs-, Leib- oder Zeitrenten mehr, und noch gröfsere Weitläufigkeiten bey dem Gebrauche der Logarithmen. Dazu kömmt, dafs, je mehr einzelne Theile zu berechnen, und je mannichfacher die Operationen sind, desto leichter Rechnungsfehler vorfallen.

Ich halte es daher für das bequemste und sicherste, wenn man die höhern Verbindungsrenten, zumal ein System derselben, berechnen will, dazu die einfachste Formel, nämlich $\lambda\,\overline{abc\,..\,k} = \frac{1}{ABC\,..\,K}(\frac{A^{1}\,B^{1}\,..\,K^{1}}{r^{1}} + \frac{A^{2}\,B^{2}\,..\,K^{2}}{AB\,..\,K\,r^{2}} + ..)$ zu gebrauchen. Freilich werden die Producte, wie $A^{1}\,B^{1}\,..\,K^{1}$ etc., besonders bey Wargentins und Deparcieux Sterbensordnung, sehr grofse Zahlen; da jedoch die Zahlen

der Lebenden überall nur approximative Gröfsen sind, so kann man sich füglich mit den ersten sechs oder sieben Decimalstellen der Producte begnügen und also die gewöhnlichen Logarithmen dabey anwenden. Dabey ist es am bequemsten, ein für allemal die Logarithmen sowohl für die Zahlen der Sterbensordnung als für die Potenzen von $\frac{1}{r}$ auszuschreiben. Wenn man dann die Logarithmen für $A^{\overline{n}}$, $B^{\overline{n}}$ etc. bis $K^{\overline{n}}$, imgleichen für $\frac{1}{rn}$ zusammennimmt, und die zu der Summe gehörige Zahl sucht, so erhält man auf einmal durch eine nicht sehr weitläufige Operation den Theil $\frac{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} \,..\, K^{\overline{n}}}{rn}$ etc. Dafs es am bequemsten sey, erst nach geschehener Summirung aller Theile die Summe durch AB .. K zu dividiren, ergiebt sich von selbst. Noch kann man die Arbeit etwas mehr abkürzen, wenn man ein für allemal die Logarithmen für die discontirten Zahlen der Lebenden sucht und in eine Tabelle bringt. Man addirt alsdann die Logarithmen für $\frac{A^{\overline{n}}}{ra+n}$, für $B^{\overline{n}}$, $C^{\overline{n}}$ etc. bis $K^{\overline{n}}$, wodurch man $\frac{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} \,..\, K^{\overline{n}}}{ra+n}$ erhält. Wenn demnächst alle diese Theile berechnet und addirt sind, so mufs die Summe mit $\frac{AB \,..\, K}{ra}$ dividirt werden, wo man wieder $\frac{A}{ra}$ aus der verfertigten Tabelle nimmt. Hat man dann einmal die Producte $\frac{A^{\overline{1}} B^{\overline{1}} \,..\, K^{\overline{1}}}{ra+1}$ etc. so kann man davon wieder Ge-

brauch machen, um die Verbindungsrente $\lambda\sqrt{(a-n)(b-n)..(k-n)}$ zu finden.

Will man für eine gegebene Altersverbindung die Werthe der Verbindungsrenten etwa von 5 zu 5 Jahren haben, so fängt man am bequemsten mit dem höhern Alter an und berechnet die Werthe für die jüngern Jahre nach der Regel des §. 247.

§. 245.

Wenn die Rente auch für diejenigen Vereine, welche in jedem Jahre aufgelöset werden, nach Verhältnifs des Zeittheils, während defsen sie noch bestanden haben, jedoch am Ende des Jahrs, bezahlt werden soll, so ist, in Uebereinstimmung mit dem, was schon oben §. 241 angeführt worden, zu dem in den vorhergehenden §. §. 243 und 244 angegebenen Werthe hinzuzulegen $(\frac{1}{2}\int\frac{{}'{}^{1}\mathfrak{P}}{r^{1}} + \frac{1}{3}\int\frac{{}'{}^{1}\mathfrak{Q}}{r^{1}} + \frac{1}{4}\int\frac{{}'{}^{1}\mathfrak{R}}{r^{1}} + ..) : AB\,..\,K$, wo ${}^{1}\mathfrak{P}$ die Summe der Verbindungen nach $m-1$, die aus den m Zahlen A^{1}, B^{1} .. K^{1} genommen werden können, jede Verbindung multiplicirt in dasjenige Decrement des ersten Jahrs, defsen Hauptzahl in der Verbindung nicht enthalten ist, ${}^{2}\mathfrak{P}$ die nämliche Summe der Verbindungen defselben Grades aus den m Zahlen A^{2}, B^{2} .. K^{2}, jede Verbindung multiplicirt in dasjenige Decrement des 2ten Jahrs, defsen Hauptzahl in der Verbindung

nicht vorkömmt, etc. $^{1}\mathfrak{Q}$ die Summe aller Verbindungen nach $m-2$ unter den m Zahlen $A^{1}B^{1}..K^{1}$; jede Verbindung multiplicirt in das Product derer beiden Decremente des ersten Jahrs, deren Hauptzahlen in der Verbindung nicht enthalten sind etc.

Diese Correction kann indefsen noch auf eine andre Art ausgedruckt werden. Es ist nämlich nach §. 209 $\Delta\,(AB\,..\,K) = {}^{1}\mathfrak{P} + {}^{1}\mathfrak{Q} + {}^{1}\mathfrak{R} + ..$, $\Delta\,(A^{1}B^{1}\,..\,K^{1}) = {}^{2}\mathfrak{P} + {}^{2}\mathfrak{Q} + {}^{2}\mathfrak{R} + ..$ etc., und folglich

$$\frac{1}{AB\,..\,K\,r}\int\frac{\Delta\,(A^{0}B^{0}\,..\,K^{0})}{r^{0}} = \frac{1}{AB\,..\,K}\left(\int\frac{{}^{1}\mathfrak{P}}{r^{1}} + \int\frac{{}^{1}\mathfrak{Q}}{r^{1}} + \int\frac{{}^{1}\mathfrak{R}}{r^{1}} + ..\right).$$

Also ist die angegebene Correction, oder

$$\frac{1}{AB\,..\,K}\left(\tfrac{1}{2}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{P}}{r^{1}} + \tfrac{1}{3}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{Q}}{r^{1}} + \tfrac{1}{4}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{R}}{r^{1}} + ..\right) = \frac{1}{AB..K}\left(\tfrac{1}{2}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{P}}{r^{1}} + \tfrac{1}{2}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{Q}}{r^{1}} + \tfrac{1}{2}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{R}}{r^{1}} + \tfrac{1}{2}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{S}}{r^{1}} + .. - \frac{1}{2.3}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{Q}}{r^{1}} - \frac{2}{2.4}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{R}}{r^{1}} - \frac{3}{2.5}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{S}}{r^{1}} - ..\right) =$$

$$\frac{1}{2r}\int\frac{\Delta\,(A^{0}B^{0}\,..\,K^{0})}{AB\,..\,K\,r^{0}} - \frac{1}{2.3}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{Q}}{AB\,..\,K\,r^{1}} - \frac{2}{2.4}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{R}}{AB\,..\,K\,r^{1}} - \frac{3}{2.5}\int\frac{{}^{1}\mathfrak{S}}{AB..Kr^{1}} - ..$$

Und da ferner nach §. 243 $\int\frac{\Delta\,(A^{0}B^{0}\,..\,K^{0})}{AB\,..\,K\,r^{0}}$

$= 1 - \frac{\lambda \overline{a\,b\,..\,k}}{p}$, so hat man auch die Correction $= \frac{1}{2r} - \frac{\lambda\, a\, \overline{b\,..\,k}}{2pr} - \frac{1}{6} \int \frac{{}'{}^{1}\mathfrak{Q}}{AB\,..\,K\,r^{1}}$

$- \frac{2}{8} \int \frac{{}'{}^{1}\mathfrak{R}}{AB\,..\,K\,r^{1}} - \frac{3}{10} \int \frac{{}'{}^{1}\mathfrak{S}}{AB\,..\,K\,r^{1}} - ..$

Hiernach wird daher der vollständige Werth der Verbindungsrente $= (1 - \frac{1}{2pr})\, \lambda\, \overline{a\,b\,..\,k}$

$+ \frac{1}{2r} - \frac{1}{6} \int \frac{{}'{}^{1}\mathfrak{Q}}{AB\,..\,K\,r^{1}} - \frac{2}{8} \int \frac{{}'{}^{1}\mathfrak{R}}{AB\,..\,K\,r^{1}}$

$- \frac{3}{10} \int \frac{{}'{}^{1}\mathfrak{S}}{AB\,..\,K\,r^{1}} - .., $ welche Reihe man so lange fortsetzen kann, als es der Genauigkeit wegen nöthig ist.

Für $m = 1$ erhält man also den vollständigen Werth $= (1 - \frac{1}{2pr})\, \lambda\, a + \frac{1}{2r}$, für $m = 2$ hat man denselben $= (1 - \frac{1}{2pr})\, \lambda\, \overline{ab} + \frac{1}{2r}$

$- \frac{1}{6\,A\,B\,r} \int \frac{\Delta\, A^{0}\, \Delta\, B^{0}}{r^{0}}$ (Vergl. §. 147). Für $m = 3$ hätte man diesen Werth $=$

$(1 - \frac{1}{2pr})\, \lambda\, \overline{abc} + \frac{1}{2r} -$

$\frac{1}{6\,.\,A\,B\,C} \left(\int \frac{A'^{1}\, \Delta\, B'^{0}\, \Delta\, C'^{0}}{r^{1}} \right. +$

$$\int \frac{B'^{1} \triangle A'^{0} \triangle C'^{0}}{r^{1}} + \int \frac{C'^{1} \triangle A'^{0} \triangle B'^{0}}{r^{1}})$$

$$- \frac{1}{4.ABC\,r} \int \frac{\triangle A^{0} \triangle B^{0} \triangle C^{0}}{r^{0}} .$$

Für m = 4 erhielte man den vollständigen

$$\text{Werth} = (1 - \frac{1}{2pr}) \lambda \overline{abcd} + \frac{1}{2r} -$$

$$\frac{1}{6.ABCD} (\int \frac{A'^{1} B'^{1} \triangle C'^{0} \triangle D'^{0}}{r^{1}} +$$

$$\int \frac{A'^{1} C'^{1} \triangle B'^{0} \triangle D'^{0}}{r^{1}} + \int \frac{A'^{1} D'^{1} \triangle B'^{0} \triangle C'^{0}}{r^{1}}$$

$$+ \int \frac{B'^{1} C'^{1} \triangle A'^{0} \triangle D'^{0}}{r^{1}} + \int \frac{B'^{1} D'^{1} \triangle A'^{0} \triangle C'^{0}}{r^{1}}$$

$$+ \int \frac{C'^{1} D'^{1} \triangle A'^{0} \triangle B'^{0}}{r^{1}}) -$$

$$\frac{1}{4.ABCD} (\int \frac{A'^{1} \triangle B'^{0} \triangle C'^{0} \triangle D'^{0}}{r}$$

$$+ \int \frac{B'^{1} \triangle A'^{0} \triangle C'^{0} \triangle D'^{0}}{r^{1}} + \int \frac{C'^{1} \triangle A'^{0} \triangle B'^{0} \triangle D'^{0}}{r}$$

$$+ \int \frac{D'^{1} \triangle A'^{0} \triangle B'^{0} \triangle C'^{0}}{r^{1}}) -$$

$$\frac{3}{10.ABCD\,r} \int \frac{\triangle A^{0} \triangle B^{0} \triangle C^{0} \triangle D^{0}}{r^{0}} \text{ etc.}$$

Anm. Die nach $\frac{1}{2r}$ folgenden Theile sind in dem Falle, wenn nicht A, B, C, D sehr kleine Zahlen sind, unbeträchtlich, und können der Regel nach ohne merklichen Fehler wegfallen. Wären z. B. alle Personen von gleichem Alter a, und wäre a = 85, so würde für m = 3 der zunächst nach

$\frac{1}{2r}$ folgende Theil $= \frac{1}{2A^3} \int \frac{A^2 (\Delta A^0)^2}{r^1}$,

und der folgende $= \frac{1}{4A^3 r} \int \frac{(\Delta A^0)^3}{r^0}$. Hier ist nun nach Süfsmilchs Tabelle schon $\frac{1}{2A^3} \int A^2 (\Delta A^0)^2 = \frac{285}{9826} = 0{,}029$, und $\frac{1}{4A^3} \int (\Delta A^0)^3 = \frac{65}{19652} = 0{,}0033$. Folglich sind um so mehr $\frac{1}{2A^3} \int \frac{A^1 (\Delta A^0)^2}{r^1}$ und $\frac{1}{4A^3 . r} \int \frac{(\Delta A^0)^3}{r^0}$ unbeträchtliche Grö-fsen. Bey a $=$ 92 würde $\frac{1}{2A^3} \int A^1 (\Delta A^0)^2$ erst $= \frac{6}{128} = 0{,}047$ und $\frac{1}{4A^3} \int (\Delta A^0)^3 = \frac{4}{256} = 0{,}015$.

Wäre dagegen a $=$ 95, so wäre freilich der Theil $\frac{1}{2A^3} \int \frac{A^1 (\Delta A^0)^2}{r^1} = 0$, da $A^1 = 0$ ist, aber der Theil $\frac{1}{4A^3} \int \frac{(\Delta A)^3}{r^1}$ würde $= \frac{1}{4r}$. Da nun für a $=$ 95 zufolge Süfsmilchs Tabelle $\lambda a^3 = 0$, so würde der vollständige Werth dieser Verbindungsrente $= \frac{1}{2r} - \frac{1}{4r} = \frac{1}{4r}$, wie es auch seyn mufs, da, wenn das Absterben der Einzelnen innerhalb des Jahrs als gleichmäfsig angenommen wird, die Verbindung zu 3 nur $\frac{1}{4}$ des letzten Jahrs besteht, und der Voraufsetzung nach die Rente am Ende des Jahrs ausbezahlt werden soll. Bey einer Verbindung nach 4 und dem Alter von 95 Jahren erhielte man den letzten

Theil $= \frac{3}{10\,A^4} \int \frac{(\Delta A)^4}{r^1} = \frac{3}{10\,r}$, also die Correction so wie die vollständige Verbindungsrente $=$

$$\frac{1}{2\,r} - \frac{3}{10\,r} = \frac{1}{5\,r}.$$

§. 245. b.

Sonst kann man, wenn die Rente jedesmal am Ende des Jahrs bezahlt werden soll, und wenn man durchgängig anstatt der Decremente die Zahlen der Lebenden, nämlich $A^{\overline{n-1}} - A^{\overline{n}}$ anstatt $\Delta A^{\overline{n-1}}$ etc., setzt, den vollständigen Werth der Verbindungsrente noch auf eine andre Weise ausdrucken. Es ist nämlich, in Uebereinstimmung mit dem 209 b., die Rente für $A = \frac{1}{2}\left[\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\lambda\,(a-1) + \lambda a\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{\lambda a}{r} + \lambda a\right) = \frac{1}{2r} + \frac{r+1}{2\,r}\lambda a$. Ferner ist die Verbindungsrente für

$$AB = \frac{1}{3}\,\frac{A^{\overline{-1}}\,B^{\overline{-1}}}{A\,B}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)} + \frac{1}{6}\left[\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b} + \frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)}\right] + \frac{1}{3}\,\lambda\,\overline{ab} = \frac{1}{3\,r} +$$

$$\frac{r+1}{3r}\,\lambda\,\overline{abc} + \tfrac{1}{6}\left[\frac{A^{-1}}{A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b} + \frac{B^{-1}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)}\right].$$

Weiter ist die Verbindungsrente für drey Personen $A\,B\,C =$

$$\tfrac{1}{4}\,\frac{A^{-1}B^{-1}C^{-1}}{A\,B\,C}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}$$

$$+\tfrac{1}{12}\left[\frac{A^{-1}B^{-1}}{A\,B}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} + \frac{A^{-1}C^{-1}}{A\,C}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b\,(c-1)} + \frac{B^{-1}C^{-1}}{B\,C}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,(c-1)}\right] +$$

$$\tfrac{1}{12}\left[\frac{A^{-1}}{A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b\,c} + \frac{B^{-1}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,c} + \frac{C^{-1}}{C}\,\lambda\,\overline{ab\,(c-1)}\right] + \tfrac{1}{4}\,\lambda\,\overline{abc} =$$

$$\frac{1}{4r} + \frac{r+1}{4r}\,\lambda\,\overline{abc} +$$

$$\tfrac{1}{12}\left[\frac{A^{-1}B^{-1}}{A\,B}\,\lambda\,\overline{a-1.\,b-1.\,c} + \frac{A^{-1}C^{-1}}{A\,C}\,\lambda\,\overline{a-1.\,b.\,c-1} + \frac{B^{-1}C^{-1}}{B\,C}\,\lambda\,\overline{a.\,b-1.\,c-1}\right] +$$

$$\tfrac{1}{12}\left[\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\ \lambda\,\overline{a-1\,.\,bc}\ +\right.$$

$$\frac{B^{\overline{-1}}}{B}\ \lambda\,\overline{a\,.\,b-1\,.\,c}\ +$$

$$\left.\frac{C^{\overline{-1}}}{C}\ \lambda\,\overline{ab\,.\,c-1}\right]\ \text{etc.}$$

Es ist jedoch diese Formel für die Ausübung mühsam, indeſsen erklären sich hieraus die ähnlichen Ausdrücke, die bey Berechnung des vollständigen Werths der Anwartschaften weiter unten vorkommen.

§. 246.

Soll die Verbindungsrente für alle vollständige Vereine, nach Verhältniſs der Zeit, während der sie in jedem Jahre noch bestehen, aber *in augenblicklichen Terminen*, bezahlt werden, so ist der gegenwärtige Werth derselben für das erste Jahr $=$

$$\frac{1}{AB\,..\,K}\int(A-x\,\Delta A)\,(B-x\,\Delta B)\,.\,.\,(K-x\,\Delta K)\frac{dx}{r^x}.$$

Wenn $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ etc. hier dieselbe Bedeutung haben, die ${}^1\mathfrak{P}$, ${}^1\mathfrak{Q}$, ${}^1\mathfrak{R}$, ${}^1\mathfrak{S}$ etc. im §. 245 hatten, jedoch mit dem Unterschiede, daſs die Decremente zwar unverändert beibehalten werden, die Zahlen der Lebenden aber nicht

für das Ende sondern für den Anfang jedes Jahrs genommen werden, so ist der gedachte Werth =

$$\frac{1}{AB\,..\,K}\,(AB\,..\,K\int\frac{dx}{r^x} - \mathfrak{P}\int x\,\frac{dx}{r} + \mathfrak{Q}\int x^2\,\frac{dx}{r^x} - \mathfrak{R}\int x^3\,\frac{dx}{r^x} + ..\,-\,..).$$

Setzt man hier für $\int\frac{dx}{r^x}$, $\int x\,\frac{dx}{r^x}$ etc. die im §. 42 angegebenen Ausdrücke, so erhält man den gegenwärtigen Werth der Rente für das erste Jahr

$$= \frac{1}{AB\,..\,K}\times$$

$$\left\{\begin{array}{l} AB\,..\,K\,\pi\,(1-\frac{1}{r}) \\ -\mathfrak{P}\,[\,\pi^2\,(1-\frac{1}{r})-\frac{\pi}{r}] \\ +\mathfrak{Q}\,[2\,\pi^3\,(1-\frac{1}{r})-\frac{\pi+2\pi^2}{r}] \\ -\mathfrak{R}\,[6\,\pi^4\,(1-\frac{1}{r})-\frac{\pi+3\pi^2+6\pi^3}{r}] \\ +\quad .\quad . \end{array}\right\}$$

Wenn ferner $\mathfrak{P}^1$, $\mathfrak{Q}^1$, $\mathfrak{R}^1$ für das zweite Jahr dieselbe Bedeutung haben, die $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ etc. für das 1ste hatten, so ist der gegenwärtige Werth der Zahlung des zweiten Jahrs $= \frac{1}{AB\,..\,K}\times$.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{A^{\underline{1}} B^{\underline{1}} \,..\, K^{\underline{1}}}{r} \pi \left(1 - \frac{1}{r}\right) \\ - \frac{\mathfrak{P}^{\underline{1}}}{r} \left[\pi^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \frac{\pi}{r}\right] \\ + \frac{\mathfrak{Q}^{\underline{1}}}{r} \left[2\pi^3 \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \frac{\pi + 2\pi^2}{r}\right] \\ - \frac{\mathfrak{R}^{\underline{1}}}{r} \left[6\pi^4 \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \frac{\pi + 3\pi^2 + 6\pi^3}{r}\right] \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Für alle Jahre erhält man also hienach den

$$\text{Werth} = \frac{1}{AB \,..\, K} \left[\frac{\pi}{pr} AB \,..\, K + \frac{\pi}{pr} \int \frac{A'^{\underline{1}} B'^{\underline{1}} \,..\, K'^{\underline{1}}}{r} - \left(\frac{\pi^2}{pr} - \frac{\pi}{r}\right) \int \frac{\mathfrak{P}'^{\underline{0}}}{r^0} + \left(\frac{2\pi^3}{pr} - \frac{\pi + 2\pi^2}{r}\right) \int \frac{\mathfrak{Q}'^{\underline{0}}}{r^0} - \left(\frac{6\pi^4}{pr} - \frac{\pi + 3\pi^2 + 6\pi^3}{r}\right) \int \frac{\mathfrak{R}'^{\underline{0}}}{r^0} + \,..\right] =$$

$$\frac{\pi}{pr} (1 + \lambda \overline{abc \,..\, k}) - \frac{1}{AB \,..\, K} \left[\left(\frac{\pi^2}{pr} - \frac{\pi}{r}\right) \int \frac{\mathfrak{P}'^{\underline{0}}}{r^0} - \left(\frac{2\pi^3}{pr} - \frac{\pi + 2\pi^2}{r}\right) \int \frac{\mathfrak{Q}'^{\underline{0}}}{r^0} + \left(\frac{6\pi^4}{pr} - \frac{\pi + 3\pi^2 + 6\pi^3}{r}\right) \int \frac{\mathfrak{R}'^{\underline{0}}}{r^0} - \,..\right].$$

Hier kann man nun, wenn der Zinsfuſs gegeben ist, die Coefficienten ein für allemal berechnen. Es ist nämlich für den Zinsfuſs von 4 Procent

$\frac{\pi}{pr} = 0{,}980643$, ferner $\frac{\pi^2}{pr} - \frac{\pi}{r} = 0{,}487117$,

$\frac{2\pi^3}{pr} - \frac{\pi + 2\pi^2}{r} = 0{,}323680$,

$\frac{6\pi^4}{pr} - \frac{\pi + 3\pi^2 + 6\pi^3}{r} = 0{,}242282$ u. s. w.

Man könnte auch den Werth der so bestimmten Verbindungsrente durch lauter bejahte Theile ausdrucken, nämlich für das erste Jahr durch

$$\frac{1}{A\,B\,..\,K} \int [A^x + (1-x)\,\Delta A]\,[B^x + (1-x)\,\Delta B]$$

$$[C^x + (1-x)\,\Delta C]\,..\,[K^x + (1-x)\,\Delta K]\,\frac{dx}{rx},$$

In diesem Falle hat man den Werth $=$

$$\frac{1}{AB\,..\,K}\,[\int A^x\,B^x\,..\,K^x\,\frac{dx}{rx} +$$

$$^x\mathfrak{P} \int (1-x)\,\frac{dx}{rx} + {}^x\mathfrak{Q} \int (1-x)^2\,\frac{dx}{rx} +$$

$$^x\mathfrak{R} \int (1-x)^3\,\frac{dx}{rx} + ..]$$ wo $^x\mathfrak{P}$, $^x\mathfrak{Q}$, $^x\mathfrak{R}$ etc. die im §. 245 angegebene Bedeutung haben. Wenn man nun, in der im §. 237 angegebenen Formel für $\frac{\int (\alpha - x)^m}{\alpha^m}\,\frac{dx}{rx}$, $\alpha = 1$, auch nach der Integration $x = 1$ setzt, so erhält man

$$\int (1-x)\,\frac{dx}{rx} = \pi - \frac{\pi^2}{pr}, \int (1-x)^2\,\frac{dx}{rx}$$

$$= \pi - 2\pi^2 + \frac{2\pi^3}{pr}, \int (1-x)^3\,\frac{dx}{rx} =$$

$\pi - 3\pi^2 + 6\pi^3 - \frac{6\pi^4}{pr}$ etc. Also wird der vollständige Werth der Verbindungsrente für das erste Jahr

$= \frac{1}{AB\,..\,K}\,[\frac{\pi}{pr}\,A^1B^1\,..\,K^1 + (\pi - \frac{\pi^2}{pr})\,{}^1\mathfrak{P}$

$+ (\pi - 2\pi^2 + \frac{2\pi^3}{pr})\,{}^1\mathfrak{Q} + (\pi - 3\pi^2 + 6\pi^3 - \frac{6\pi^4}{pr})\,{}^1\mathfrak{R} + ..$ etc. etc. Für alle Jahre hat man also diesen Werth $= \frac{\pi}{p}\,\lambda\,\overline{ab\,..\,k}$

$+ \frac{1}{AB\,..\,K}\,[(\pi r - \frac{\pi^2}{p})\int\frac{{}^1\mathfrak{P}}{r^1} + (\pi r - 2\pi^2 r + \frac{2\pi^3}{p})\int\frac{{}^1\mathfrak{Q}}{r^1} + (\pi r - 3\pi^2 r + 6\pi^3 r - \frac{6\pi^4}{p})\int\frac{{}^1\mathfrak{R}}{r^1} + ..]$.

Für $r = 1{,}04$ ist hier $\frac{\pi}{p} = 1{,}019869$, $\pi r - \frac{\pi^2}{p} = 0{,}513268$, $\pi r - 2\pi^2 r + \frac{2\pi^3}{p} = 0{,}343294$ u. s. w.

Anm. Näherungsweise kann man auch den vollständigen Werth der in augenblicklichen Terminen zahlbaren Verbindungsrente durch $\frac{\pi}{p}\,(\lambda\,\overline{ab\,..\,k} + \frac{1}{2\,AB\,..\,K}\int\frac{{}^1\mathfrak{P}}{r^1} + \frac{1}{3\,AB\,..\,K}\int\frac{{}^1\mathfrak{Q}}{r^1} + \frac{1}{4\,AB\,..\,K}\int\frac{{}^1\mathfrak{R}}{r^1} + ..)$ ausdrucken. Eigentlich ist dies der Werth der Verbindungsrente, die für alle Vereine nach Verhältnifs der Zeit, welche

sie bestanden haben, bezahlt werden soll, aber so berechnet als wenn diese Rente während des Jahrs in augenblicklichen Terminen, *jedoch mit einem gleichen Belauf in jedem Augenblick*, entrichtet werden sollte. Es nimmt aber streng genommen, der Belauf der Rente an alle Interefsenten vom Anfange des Jahrs bis zum Ablauf defselben continuirlich ab. Die Rente genau berechnet wird daher auch etwas gröfser als sie nach der angegebenen Näherung ausfällt, weil im ersten Fall zu Anfang des Jahrs mehr, zu Ende defselben aber weniger an Renten bezahlt wird als im letzteren Falle. Grofs ist indefsen der Unterschied nicht, da er überhaupt nur aus denjenigen Verbindungen entspringt, die im Laufe jedes Jahrs aufhören, auch nicht einmal aus den an dieselben zu zahlenden Renten, die in beiden Berechnungen gleich sind, sondern aus den Zinsen dieser Renten ensteht.

§. 247. a.

Wenn die Verbindungsrente für m Personen von gegebenem Alter bekannt ist, so wird daraus die Verbindungsrente für m Personen, die durchgängig um 1 Jahr älter sind, folgendermaafsen gefunden. Es ist $\lambda\overline{a\,b\,..\,k} = \frac{1}{AB\,..\,K}\left(\frac{A^1B^1\,..\,K^1}{r} + \frac{A^2\,B^2\,..\,K^2}{r^2} + \frac{A^3\,B^3\,..\,K^3}{r^3} + ..\right)$. Ebenfalls hat man $\lambda\overline{(a+1)\,(b+1)\,..\,(k+1)} = \frac{1}{A^1B^1\,..\,K^1}\left(\frac{A^2\,B^2\,..\,K^2}{r} + \frac{A^3\,B^3\,..\,K^3}{r^2} + ..\right)$. Folglich ist $\frac{A^1\,B^1\,..\,K^1}{A\,B\,..\,K\,r} \times \lambda\overline{(a+1)\,(b+1)\,..\,(k+1)} =$

$$\frac{1}{AB\,..\,K}\left(\frac{A^2B^2\,..\,K^2}{r^2}+\frac{A^3B^3\,..\,K^3}{r^3}\right.$$

$$\left.+\,..\right) \text{ und } \frac{A^1B^1\,..\,K^1}{AB\,..\,K\,r}+\frac{A^2B^2\,..\,K^2}{AB\,..\,K\,r}\times$$

$$\lambda\overline{(a+1)\,(b+1)\,..\,(k+1)}=\frac{A^1B^1\,..\,K^1}{AB\,..\,K\,r}$$

$$+\frac{A^2B^2\,..\,K^2}{AB\,..\,K\,r^2}+\frac{A^3B^3\,..\,K^3}{AB\,..\,K\,r^3}+..=$$

$\lambda\overline{ab\,..\,k}$. Also $\lambda\overline{(a+1)\,(b+1)\,..\,(k+1)}=$

$$\frac{AB\,..\,K}{A^1B^1\,..\,K^1}\,r\,\lambda\overline{ab\,..\,k}-1. \text{ (Vergl. §. 155).}$$

Hieraus hat man auch $\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,..\,(k-1)}$

$$=\frac{AB\,..\,K}{A^{-1}B^{-1}\,..\,K^{-1}\,r}\,\lambda\overline{ab\,..\,k}+$$

$$\frac{AB\,..\,K}{A^{-1}B^{-1}\,..\,K^{-1}\,r}=\frac{AB\,..\,K}{A^{-1}B^{-1}\,..\,K^{-1}\,r}\times$$

$(\lambda\overline{ab\,..\,k}+1)$, wonach man die Verbindungsrente für die um 1 Jahr jüngern Personen findet.

§. 247. b.

Sollte aus dem Werthe der Verbindungsrente für m Personen eines gegebenen Alters überhaupt

der Werth der Verbindungsrente für m Personen, die durchgängig um n Jahre älter sind, gefunden werden, so hat man $\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)\,..\,(k+n)}$

$$= \frac{A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}\,..\,K^{\overline{n+1}}}{A^{n}\,B^{n}\,..\,K^{n}\,r} + \frac{A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}\,..\,K^{\overline{n+2}}}{A^{n}\,B^{n}\,..\,K^{n}\,r^{2}} + ..,$$ und $\lambda\,\overline{a\,b\,..\,k}$

$$= \frac{A^{1}\,B^{1}\,..\,K^{1}}{A\,B\,..\,K\,r} + .. + \frac{A^{n}\,B^{n}\,..\,K^{n}}{A\,B\,..\,K\,r^{n}} + \frac{A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}\,..\,K^{\overline{n+1}}}{A\,B\,..\,K\,r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}\,..\,K^{\overline{n+2}}}{A\,B\,..\,K\,r^{n+2}}$$

$+ ..,$ oder wenn man die ersten n Glieder von $\lambda\,\overline{a\,b\,..\,k}$ mit Q bezeichnet, $\lambda\,\overline{a\,b\,..\,k} = Q +$

$$\frac{A^{n}\,B^{n}\,..\,K^{n}}{A\,B\,..\,K\,r^{n}}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}\,..\,K^{\overline{n+1}}}{A^{n}\,B^{n}\,..\,K^{n}\,r} + \frac{A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}\,..\,K^{\overline{n+2}}}{A^{n}\,B^{n}\,..\,K^{n}\,r^{2}} + ..\right) = Q +$$

$$\frac{A^{n}\,B^{n}\,..\,K^{n}}{A\,B\,..\,K\,r^{n}}\,\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)\,..\,(k+n)}.$$

Folglich wird $\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)\,..\,(k+n)} = \frac{A\,B\,..\,K\,r^{n}}{A^{n}\,B^{n}\,..\,K^{n}}.(\lambda\,\overline{a\,b\,..\,k} - Q)$. Hiernach

kann man, wenn einmal die Verbindungsrente für m Personen bekannt ist, so lange der Unterschied des Alters für die verschiedenen Personen unverändert bleibt, die Verbindungsrenten für jedes höhere Alter derselben berechnen. Wenn aber hiebey die einzelnen Glieder der Reihe von $\lambda \overline{ab \,..\, k}$ erst berechnet werden müfsten, so könnte diese Methode nur dann die Arbeit abkürzen, falls das Stück Q weniger Glieder hätte als das ergänzende Stück der Reihe von $\lambda \overline{ab \,..\, k}$.

Eben so findet man aus der Verbindungsrente für die Personen vom Alter a, b etc. bis k auch die Verbindungsrente für eben so viele durchgängig um n Jahre jüngere Personen. Wenn man nämlich die n ersten Glieder der Verbindungsrente $\lambda \overline{(a - n)\ (b - n)\ ..\ (k - n)}$ mit Q bezeichnet, so ist $\lambda \overline{(a - n)\ (b - n)\ ..\ (k - n)} = Q + \frac{AB\,..\,K}{A^{-n}_{-n}\,B^{-n}_{-n}\,..\,K^{-n}_{-n}\,m} \lambda \overline{a\,b\,..\,k}$, wo man dann wieder Q berechnen müfste.

§. 248.

Da die Berechnung der höhern Verbindungsrenten nach den bisher angeführten Formeln sehr mühsam ist, so wäre eine Näherungsmethode freilich zu wünschen; es giebt jedoch keine solche Methode, wodurch man diese Renten mit einem zu

jedem practischen Gebrauche hinreichenden Grade von Genauigkeit finden und dabey zugleich bestimmte Gränzen der möglichen Abweichung von den wahren Werthen angeben könnte. Am wenigsten sind die Näherungswerthe bey Berechnung von Ueberlebensrenten und Anwartschaften zu gebrauchen, weil dann durch Verbindung mehrerer Werthe vermittelst der Addition oder Subtraction der Fehler weit beträchtlicher werden kann. Wo indefsen die Näherungswerthe für den Zweck hinreichen, da kann man folgende Methode anwenden, die aber als Hülfsmittel Tabellen über die Werthe von Verbindungsrenten für Personen *gleiches Alters* sowohl nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens als nach derjenigen Sterbensordnung, welche man zum Grunde legen will, voraufsetzt. Wenn eine Verbindungsrente für mehrere Personen verschiedenes Alters gesucht wird, so berechne man für dieselben Personen eine Verbindungsrente nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens und dem gegebenen Zinsfufse, wobey die Altersergänzung jeder Person der doppelten mittlern Lebensdauer derselben gleich genommen wird. Dann berechne man auch die mittlere Verbindungsdauer der gegebenen Personen ebenfalls nach der Hypothese, und nehme aus den Hülfstabellen sowohl nach der Hypothese als nach der angenommenen Sterbensordnung die Rente für *eben so viele Personen gleiches Alters*, deren hypothetische Verbindungsdauer der gefundenen Verbindungsdauer der Personen verschiedenen Alters

gleich ist. Zuletzt multiplicire man, um die gesuchte Verbindungsrente zu finden, die Verbindungsrente für die Personen verschiedenen Alters nach der Hypothese mit der Verbindungsrente für die Personen gleichen Alters nach der gegebenen Sterbensordnung und dividire mit der Verbindungsrente für die Personen gleichen Alters nach der Hypothese. Das heifst, wenn die Renten nach der Hypothese hier mit l bezeichnet werden, und wenn das Alter der gegebenen Personen a, b und c, auch nach der Hypothese $E\overline{a\,b\,c} = E\,m^3$ ist, so nehme man an, dafs $l.\overline{a\,b\,c}$ sich verhalte zu $\lambda\,\overline{a\,b\,c}$ wie $l\,m^3$ zu $\lambda\,m^3$, wonach man also erhält $\lambda\,\overline{a\,b\,c} = \frac{l\,\overline{a\,b\,c}\,.\,\lambda\,m^3}{l\,m^3}$.

Wenn also z. B. nach Wargentins Sterbensordnung die Verbindungsrente für die Jahre 10, 20 und 60 gesucht wird, so sind die zu diesen Altern gehörigen Lebensergänzungen 90,14; 76,04 und 25,26, und man erhält nach der Hypothese die Leibrente, zu 4 Procent gerechnet, oder

$l\,\overline{90{,}14.76{,}04.25{,}26} = 7{,}324$, so wie

$E\,\overline{90{,}14.76{,}04.25{,}26} = 10{,}25$. Dies ist nach der Hypothese die Verbindungsdauer für drey Personen von der Altersergänzung 40,98, wozu nach Wargentin das Alter 46,76 gehört, und die Leibrente für drey Personen der angegebenen Lebensergänzung oder des angegebenen Alters ist nach der Hy-

pothese = 7,171 und nach Wargentins Sterbensordnung = 7,770. Hiernach wird der Näherungswerth $= \frac{7.770.7,324}{7,171} = 7,936$; den wahren Werth giebt Herr Brune zu 7,704 an. Auf die nämliche Weise findet man für drey Personen von 10,30 und 50 Jahren, unter Zugrundelegung der Wargentinschen Sterbensordnung, nach der Hypothese die Verbindungsrente = 8,715 und die Verbindungsdauer = 13,05, so wie hienach den gesuchten Näherungswerth $= \frac{9,499.8,715}{8,603} = 9,623$, wofür der richtige Werth bey Herrn Brune zu 9,536 angegeben ist. Der zuletzt gefundene Näherungswerth kömmt dem wahren Werthe näher als der vorher angegebene, weil in dem zweiten Beispiel der Unterschied des Alters der verbundenen Personen unter einander nicht so grofs ist als in dem ersteren.

Ueberhaupt aber ist diese Näherungsmethode sicherer anzuwenden bey solchen Sterbensordnungen, deren Decremente, die Jahre der Kindheit abgerechnet, nur einen Wendepunkt haben, wie die Süfsmilchsche und Northamptoner, als bey solchen, wobey mehrere Wendepunkte der Decremente Statt finden, wie z. B. bey Deparcieux's und Wargentins.

Als Hülfsmittel dieser Näherungsmethode theile ich hier die Verbindungsrenten bis zu 5 Personen von fünf zu fünf Jahren nach der Hypothese, nach Süfsmilchs und Deparcieux's Mortalitätstabellen

mit. Die Werthe für die ersten beiden Sterbensordnungen sind neu berechnet, für Deparcieux Tabelle aber aus dem Bruneschen Werke genommen. Noch bequemer würde diese Näherungsmethode anzuwenden seyn, wenn man ein für allemal die Werthe von $\int \frac{n^m}{r^n}$ für n von 1 bis 100 und m von 1 bis 5 verfertigte, so wie man sie in Tetens und andern Werken schon für $m = 1$ hat.

Lebensrenten
nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens zu 4 Procent.

Alterser-gänzung	1 *Person*	2 *Perso-nen*	3 *Perso-nen*	4 *Perso-nen*	5 *Perso-nen*
100	18,6287	15,2494	12,9596	11,2822	9,9922
95	18,3527	14,8944	12,6075	10,9383	9,6640
90	17,9895	14,5272	12,2557	10,5786	9,3219
85	17,6259	14,1503	11,8419	10,2050	8,9512
80	17,2275	13,7050	11,4265	9,8080	8,5908
75	16,7908	13,2489	10,9868	9,3933	8,2021
70	16,3106	12,7594	10,5210	8,9577	7,7963
65	15,7813	12,2331	10,0267	8,4995	7,3722
60	15,1965	11,6663	9,5018	8,0173	6,9287
55	14,5487	11,0549	8,9436	7,5091	6,4650
50	13,8293	10,3942	8,3492	6,9732	5,9793
45	13,0284	9,6789	7,7155	6,4068	5,4727
40	12,1347	8,9033	7,0390	5,8105	4,9552
35	11,1349	8,0606	6,3160	5,1787	4,3746
30	10,0136	7,1436	5,5422	4,5098	3,7859
25	8,7550	6,1438	4,7130	3,8018	3,1647
20	7,3326	5,0519	3,8234	3,0505	2,4629
15	5,7281	3,8577	2,8686	2,2543	1,8357
10	3,9117	2,5505	1,8443	1,4128	1,1225
5	1,8505	1,1247	0,7557	0,5578	0,3963

Lebensrenten
nach Süfsmilchs Sterbensordnung
zu 4 Procent.

Alter	1 *Person*	2 *Personen*	3 *Personen*	4 *Personen*	5 *Personen*
10	18,2488	15,3370	13,3657	11,8947	10,7402
15	17,6104	14,6304	12,6628	11,2197	10,1056
20	16,7905	13,6778	11,6685	10,2172	9,1104
25	15,9870	12,8127	10,8152	9,3972	8,3330
30	15,0847	11,8512	9,8672	8,4812	7,4590
35	14,1175	10,8576	8,9110	7,5732	6,6093
40	13,1565	9,9484	8,0939	6,8441	5,9325
45	12,0108	8,8363	7,0649	5,8981	5,0619
50	10,7961	7,6865	6,0105	4,9282	4,1633
55	9,6594	6,6900	5,1663	4,2043	3,5331
60	8,3422	5,5575	4,1927	3,3603	2,7938
65	7,0528	44,434	3,2246	2,5077	2,0325
70	5,9901	3,6100	2,5408	1,9285	1,5309
75	5,0578	2,9401	2,0176	1,5004	1,1695
80	4,2023	2,3863	1,5760	1,1590	0,8655
85	3,3222	1 8573	1,2037	0,8420	0,6155
90	2,2841	1,4187	0,9770	0,7131	0,5596

Lebensrenten
nach Deparcieux's Sterbensordnung
zu 4 Procent.

Alter	1 *Person*	2 *Personen*	3 *Personen*	4 *Personen*	5 *Personen*
10	19,018	16,152	14,107	12,543	11,298
15	18,544	15,644	13,601	12,052	10,829
20	17,949	14,961	12,883	11,315	10,081
25	17,420	14,455	12,421	10,894	9,693
30	16,851	13,959	12,016	10,569	9,435
35	16,107	13,266	11,408	10,045	8,986
40	15,149	12,321	10,552	9,247	8,261
45	13,970	11,126	9,582	8,172	7,256
50	12,602	9,739	8,057	6,909	6,063
55	101,1 1	8,255	6,641	5,567	4,791
60	9,630	6,916	5,436	4,473	3,789
65	8,142	5,655	4,565	3,545	2,969
70	6,516	4,299	3,222	2,568	2,122
75	4,887	2,951	2,071	1,563	1,253
80	3,629	2,051	1,567	0,987	0,747
85	2,528	1,574	0,877	0,603	0,434
90	1,185	0,522	0,280	0,161	0,097
95	0,521	0,107	,036	0,012	0,004

§. 248. b.

Eine andere Näherungsmethode, die von *Simpson*, *Morgan* und *Tetens* empfohlen wird, ist in der Anwendung bequemer; sie beruhet indefsen auf einer noch weniger evidenten Voraufsetzung als die vorhergehende. Man nimmt nämlich dabey an, dafs wenn die Verbindungsrente für m Personen gleich ist der Verbindungsrente für m — 1 andre Personen, und zu den ersteren sowohl als den letzteren noch eine Person von einem und demselben Alter hinzukömmt, die Verbindungsrente der erstern m + 1 Personen beinahe der Verbindungsrente für die letztern m Personen gleich sey.

Wird also die Verbindungsrente für m Personen gesucht, so nimmt man nach dieser Methode aus den bereits berechneten Tabellen die Verbindungsrente für die beiden ältsten der gegebenen Personen, sieht diese Verbindungsrente als eine Leibrente auf ein einziges Leben an, und sucht in den Tabellen das dazu gehörige Alter. Dann berechnet man auf die nämliche Weise die Verbindungsrente für eine Person von dem gefundenen Alter und die ältste unter den übrigen m — 2 Personen, sieht diese Verbindungsrente wieder als eine Leibrente auf ein einziges Leben an, und sucht das dazu gehörige Alter in den Tabellen. Auf diese Weise behält man zuletzt nur zwey Leben übrig, wofür man die aus den Tabellen genommene Verbindungsrente als den

Näherungswerth der Verbindungsrente für die m Personen annimmt.

Wenn man diese Methode auf die Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens anwenden wollte, so liefse sich nach den vorher angeführten Formeln eine Correction und Gränze dafür angeben. Indefsen für die Hypothese kann man diese Näherungsmethode ganz entbehren, da man fast eben so leicht den richtigen Werth der Verbindungsrenten finden kann, besonders wenn man einmal die Werthe von $\int \frac{n^m}{r^n}$ für diesen Gebrauch berechnet hat.

Will man aber die angegebene Methode auf die erfahrungsmäfsigen Sterbensordnungen anwenden, so läfst sich weder eine allgemeine Regel der Correction noch Gränze der Abweichung theoretisch bestimmen. (S. §. 210. Anm.)

Für die Verbindungsrenten dreier Personen trifft diese Näherungsberechnung ziemlich zu, wie dies für die Wargentinsche Sterbensordnung aus der folgenden, zu 4 Procent berechneten, Tabelle erhellet; indefsen sind doch schon manche Werthe für die höhern Altersjahre nicht zu gebrauchen. So ist z. B. nach dieser Tabelle $\lambda\ \overline{50.90.90} = 0{,}867$ und $\lambda\ \overline{70.90.90} = 0{,}790$; dagegen ist der richtige Werth für $\lambda\ \overline{90.90}$, der doch gröfser seyn mufs als jene,

nur = 0,716. Für die höhern Verbindungsrenten würden die Abweichungen von dem wahren Werthe wohl noch gröfser werden, besonders wenn man mit den einmal erhaltenen Näherungswerthen weiter fortrechnete.

Verbindungsrenten für drey Personen.

Alter	*Näherungs-Werth*	*Wahrer Werth*
10.10.10	14,331	14,209
10.10.30	12,897	12,851
10.10.50	10,060	10,055
10.30.30	11,896	11,821
10.30.50	9,569	9,536
10.50.50	8,243	8,219
30.30.30	11,105	11,005
30.30.50	9,115	9,070
30.30.70	5,112	5,065
30.50.50	7,914	7,884
30.50.70	4,801	4,728
30.70.70	3,407	3,453
50.50.50	7,085	7,027
50.50.70	4,490	4,455
50.50.90	1,339	1,322
50.70.70	3,172	3,274
50.70.90	1,252	1,183
50.90.90	0,867	0,696
70.70.70	2,560	2,589
70.70.80	1,860	1,874
70.70.90	1,124	1,070
70.80.80	1,351	1,459
70.80.90	1,012	0,896
70.90.90	0,790	0,642
80.80.80	1,100	1,146
80.80.90	0,847	0,759
80.90.90	0,674	0,556

Anm. 1. Noch kann ich eine Näherungs-Methode nicht unberührt lafsen, die Tetens in seinem Werke S. 110 und 161 etc., besonders für den Fall empfiehlt, wenn man einzelne Werthe der höhern Verbindungsrenten gebrauchen sollte. Diese Methode besteht darin, das man die Sterbensordnung, welche man zum Grunde legen will, so einrichtet, dafs wenigstens von Periode zu Periode die Differenzen der Decremente gleich werden, und demnächst für jede Periode den Werth der Rente nach einer allgemeinen Formel berechnet. Die Süfsmilchsche Mortalitätstafel läfst sich so einrichten, wenn man die Grundzahl = 9000, also die Zahl der Lebenden bey dem Jahre 15 = 4598 setzt, das Decrement des Jahrs 15 = 38, die Differenzen aber von diesem Jahre an bis zum 65sten Jahre = —1, vom 66sten Jahre an aber = + $2\frac{1}{2}$ annimmt. Deparcieux's Sterbensordnung würde man vom 15ten Jahre an in vier Perioden theilen müfsen, da die Decremente von da an bis zum 26sten Jahre zunehmen, darauf bis zum 39sten Jahre abnehmen, dann wieder bis 75 wachsen, und endlich von da bis zum gänzlichen Absterben nochmals kleiner werden.

Wenn die Grundzahl für Personen vom Alter a mit A, das dazu gehörige Decrement mit d und die Differenzen, die für den gegenwärtigen Fall verneint seyn mögen, mit δ bezeichnet werden, so ist unter jener Voraufsetzung die Zahl der Lebenden

am Ende des 1sten Jahrs $A - d$

— — — 2ten — $A - 2d + \delta$

— — — 3ten — $A - 3d + 3\delta$

— — — 4ten — $A - 4d + 6\delta$

etc. etc.

— — — nten — $A - nd + \frac{n.n-1}{2}\delta$.

Da nun $\frac{n.n-1}{2}\delta = \frac{n^2}{2}\delta - \frac{n}{2}\delta$ ist, so hat

man überhaupt die Anzahl der Lebenden am Ende des nten Jahrs dieser Periode $= A - (d + \frac{\delta}{2}) n + \frac{\delta}{2} n^2$, wofür man der Kürze wegen setzen kann $A - hn + kn^2$.

Wenn man also z. B. eine Verbindungsrente für vier Personen vom Alter a zu berechnen hätte, so wäre die Anzahl der bestehenden Verbindungen zu vier am Ende des nten Jahrs $= (A - hn + kn^2)^4$, der gegenwärtige Werth der im nten Jahre zahlbaren Rentensummen $= \frac{(A - hn + kn^2)^4}{rn}$, und der baare Werth der Verbindungsrente für die bezeichnete Periode $= \frac{1}{A^4} \int \frac{(A - hn + kn^2)^4}{rn} = \frac{1}{A^4} \times$

$$[A^4 \int \frac{1}{rn} - 4A^3h \int \frac{n}{rn} + (4A^3k + 6A^2h^2) \int \frac{n^2}{rn}$$

$$- (12A^2hk + 4Ah^3) \int \frac{n^3}{rn} + (A^2k^2 +$$

$$12Ah^2k + h^4) \int \frac{n^4}{rn} - (12Ahk^2 + 4h^3k) \int \frac{n^5}{rn}$$

$$+ (4Ak^3 + 6h^2k^2) \int \frac{n^6}{rn} - 4hk^3 \int \frac{n^7}{rn} +$$

$$k^4 \int \frac{n^8}{rn}],$$

wo A^4, A^3 etc. Potenzen von A sind. Wenn man nun auch die Summen $\int \frac{n^m}{rn}$ ein für allemal berechnet hätte, welches doch für die höhern Grade eine bedeutende Arbeit ist, so müfste man doch noch die jedesmaligen, zum Theil zusammengesetzten, Coefficienten und die Producte aus denselben in die discontirten Summen besonders suchen. Wäre aber nach der Mortalitätstafel noch eine Periode übrig, worin die Differenzen von den vorigen verschieden sind, so hätte man

noch ein zweites Stück der Verbindungsrente, vielleicht mit derselben Weitläufigkeit, zu berechnen.

Indefsen ist dies noch der einfachste Fall. Wären die verbundenen Personen von verschiedenem Alter a, b, c und d, so müfste man so viele Abschnitte in der Berechnung machen als irgend eine Person eins der Jahre, welche die Perioden scheiden, überschreitet, und man könnte auf diese Weise leicht zehn bis zwölf solche Stücke der Verbindungsrente, wie das vorhergedachte, zu berechnen haben.

Diese Arbeit ist in der That von einem solchen Umfange und dabey, wegen der vorkommenden vielfältigen Gröfsen, so sehr den Rechnungsfehlern ausgesetzt, dafs auch wohl der zuverläfsigste und geübteste Rechner die Verbindungsrente lieber nach der einfachsten Formel $\lambda\,\overline{abcd} = \frac{1}{ABCD}\left(\frac{A^1B^1C^1D^1}{r} + \frac{A^2B^2C^2D^2}{r^2} + \ldots\right)$ suchen möchte als nach dieser sogenannten Abkürzungs- und Näherungs-Methode.

In vorigen Zeiten hat man sich viele Mühe gegeben, die Sterbensordnung durch eine krumme Linie darzustellen. Für die Berechnung der mittlern Lebensdauer und der Renten auf ein einzelnes Leben würde die Arbeit dadurch etwas erleichtert worden seyn; wenn man aber einmal die Hülfstabellen, die vorher angeführt sind, eingerichtet hat, so ist die Erleichterung nicht bedeutend. Am meisten möchte man für die höhern Verbindungsdauern und Verbindungsrenten eine bequemere Methode als die bisher angegebenen wünschen; indefsen ergiebt es sich aus dem, was so eben angeführt worden, dafs wenn die Gleichung für die Sterblichkeitslinie auch unter der einfachsten Form $\alpha - h\,x + k\,x^2$ enthalten seyn könnte, die Berechnung der Verbindungsdauer und Verbindungsrenten doch immer sehr weitläufig werden würde.

Anm. 2. Ueber das Verhältnifs der Leibrenten zu den Zeitrenten auf die mittlere Dauer der Existenz füge ich hier noch einige Bemerkungen hinzu.

Zuerst ergiebt sich aus der Natur der Leibrenten, dafs sie, sobald Zinsen gerechnet werden sollen, kleiner sind als die Zeitrenten auf die mittlere Lebens- oder Verbindungsdauer. Es ist nämlich die Anzahl der zu zahlenden Jahrsrenten, jede ohne Zinsen zu 1 gesetzt, die nämliche, man mag die eigentlichen Lebensrenten oder die Zeitrenten auf die mittlere Dauer der Existenz oder Coexistenz zum Grunde legen. Die mittlere Dauer ergiebt sich nämlich gerade daraus, dafs alle Lebens- oder Verbindungsjahre zusammengenommen, und über alle Interefsenten oder Vereine gleichmäfsig vertheilt werden, wonach also bey den Zeitrenten auf die mittlere Dauer angenommen wird, dafs während dieser mittlern Dauer, länger aber nicht, an jeden Interefsenten oder jeden anfänglich bestehenden Verein jährlich 1 Rthlr. bezahlt werde. Bey den eigentlichen Lebensrenten dagegen wird vorausgesetzt, dafs die Rententhaler jedesmal nur an die noch lebenden Interefsenten oder bestehenden Vereine, folglich auch nach Ablauf der mittlern Dauer bis zum gänzlichen Abgang der Einzelnen oder Vereine, bezahlt werden, wo also, sobald Zinsen gerechnet werden, die Lebensrente durch den Discont kleiner werden mufs als die gedachte Zeitrente.

Auch ergiebt sich überdem aus der Vergleichung, dafs nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens, wenn die mittleren Verbindungsdauern gleich angenommen werden, die Verbindungsrenten für Personen gleichen Alters in jedem Verein um so mehr von den Zeitrenten auf die mittlern Verbindungsdauern abweichen, je höher der Verbindungsgrad ist. Wenn augenblickliche Zinsen zu 4 von hundert gerechnet werden, so ist z. B. die Zeitrente auf 10 Jahre $=$ 8,274; die Leibrente, in augenblicklichen Terminen zahlbar, für eine Person von der Altersergänzung 20, wo also die mittlere Lebensdauer $=$

10, ist = 7,827; die Verbindungsrente für zwey Personen von der Altersergänzung 30, deren Verbindungsdauer wieder = 10, wird = 7,654; für drey Personen von der Altersergänzung 40, wo wieder die mittlere Verbindung = 10, ist die Rente = 7,529; für vier Personen, deren Altersergänzung = 50 und mittlere Verbindungsdauer = 10, ist die Verbindungsrente 7,463, so wie endlich für fünf Personen von der Altersergänzung 60 und mittlern Verbindungsdauer = 10, die Verbindungsrente = 7,416 wird. — Ferner ist die Zeitrente auf 20 Jahre, wieder in augenblicklichen Terminen zahlbar, = 13,860; die Leibrente für die Altersergänzung von 40 Jahren wird = 12,629, die Verbindungsrente für zwey Personen, deren Altersergänzung = 60 Jahre, ist = 12,160 und für drey Personen von der Altersergänzung 80 = 11,290. — Noch ist die auf ähnliche Weise berechnete Zeitrente auf 30 Jahre = 17,655, die Leibrente des Einzelnen für die Altersergänzung von 60 Jahren wird = 15,691, die Verbindungsrente für 2 Personen, deren Altersergänzung = 90 Jahre, aber = 15,025.

Bey den empirischen Sterbensordnungen sind zwar auch die Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer von den eigentlichen Leibrenten beträchtlich verschieden. Nach Süfsmilchs Mortalitätstabelle und dem Zinsfufse von 4 Procent ist das Verhältnifs der Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer zu den Renten auf ein einziges Leben bey dem Alter von 15 Jahren =1000:900, und steigt nach und nach bis auf 1000:841, welches das Verhältnifs für das Alter von 90 Jahren ist. (S. Tetens a. a. O. Seite 109). Dagegen scheinen nach den erfahrungsmäfsigen Sterbensordnungen im Ganzen genommen die Unterschiede der Lebensrenten von verschiedenen Verbindungsgraden bey übrigens gleicher Verbindungsdauer nicht so beträchtlich zu seyn als bey dem gleichmäfsigen Absterben. So ist z. B. nach Süfsmilchs Sterbensordnung und dem Zinsfufse zu 4 Procent, für eine Person vom Alter 31,46, wo die mittlere Lebensdauer = 27,68, die Leibrente = 14,819, die Verbindungs-

rente für 2 fünfzehnjährige Personen, deren mittlere Verbindungsdauer so grofs wie die angegebene Lebensdauer, wird = 14,630. Für eine Person vom Alter 44,98, wo die mittlere Lebensdauer = 19,73, ist die Leibrente = 12,015; für zwey dreyfsigjährige, deren Verbindungsdauer auch = 19,73, ist die Verbindungsrente = 11,851. Für eine Person vom Alter 57,98, wo die mittlere Dauer = 13,05, hat man die Leibrente = 8,884; für zwey fünf und vierzigjährige Personen, deren Verbindungsdauer ebenfalls = 13,05, erhält man die Verbindungsrente = 8,836. Für eine Person vom Alter 72,28, deren Lebensdauer = 7,48, ist die Leibrente = 5,544; für zwey 60 jährige, deren Verbindungsdauer ebenfalls = 7,48, ist die Verbindungsrente = 5,557. Noch ist für eine Person vom Alter 86,64, deren Lebensdauer = 3,89, die Rente = 2,992, für zwey 70 jährige Personen aber, deren Verbindungsdauer wieder = 3,89 ist, wird die Verbindungsrente = 2,940.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich, dafs man nicht wohl, wie *Langsdorf* in seinen *arithmetischen Abhandlungen über juristische, und forstwirthschaftliche etc. Fragen*, S. 67 anräth, die Zeitrenten auf die mittlere Existenz bey Versorgungsanstalten zum Grunde legen könne. Der von ihm angeführte Grund, dafs hienach die Kafse auf ein vollkommen sicheres Fundament gebauet werde, ist auch nur von einer Seite richtig, und die vorgeschlagene Berechnung ist da, wo die Kafse Leibrenten zu empfangen hat, zu ihrem offenbaren Nachtheil. Zudem würde bey den Verbindungsrenten durch die vorgeschlagene Methode wenig gewonnen werden, da die Verbindungsdauern fast eben so weitläufig zu berechnen sind als die Verbindungsrenten.

§. 249.

Sollte eine höhere Verbindungsrente für Personen, deren Altersergänzungen α, β .. $\varkappa$ sind, mit

1 im ersten Jahre anfangen und jährlich *nach der Ordnung der natürlichen Zahlen* steigen, so wäre ihr jetziger Werth, *nach der Hypothese* und auf ganze Jahre gerechnet, $= \frac{1}{\alpha\,\beta\,..\,\varkappa} \times$

$$\int \frac{(\alpha - n)\,(\beta - n)\,..\,(\varkappa - n)\,.\,n}{r^n} =$$

$$\frac{1}{\alpha\,\beta\,..\,\varkappa}\,(\alpha\,\beta\,..\,\varkappa \int \frac{n}{r^n} - P \int \frac{n^2}{r} +$$

$$Q \int \frac{n^3}{r^n} - .. \pm \int \frac{n^{m+1}}{r^n} -),$$

wo P, Q, R etc. die oben §. 241 angeführte Bedeutung haben, und n von 1 an bis zu $\varkappa$ fortgeht, wenn dies die kleinste Altersergänzung ist. Die Summen $\int \frac{n}{r^n}$, $\int \frac{n^2}{r^n}$ etc. findet man nach §. 39.

Wird eine solche nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigende Verbindungsrente für die Personen A B C .. K mit L $\overline{a\,b\,c\,..\,k}$ bezeichnet, so ist z. B. L $\overline{abc} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha\,\beta\,\gamma \int \frac{\gamma}{r^\gamma} -$

$$(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \int \frac{\gamma^2}{r^\gamma} + (\alpha + \beta + \gamma) \int \frac{\gamma^3}{r^\gamma}$$

$$- \int \frac{\gamma^4}{r^\gamma}) = \int \frac{\gamma}{r^\gamma} - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})$$

$$\int \frac{\gamma^2}{r^\gamma} + (\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}) \int \frac{\gamma^3}{r^\gamma} -$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \int \frac{\gamma^4}{r^\gamma} \text{ etc.}$$

§. 250.

Sonst hat man auch die im vorigen §. verlangte Verbindungsrente =

$$\frac{(\alpha-1)(\beta-1)\,..\,(\varkappa-1)}{\alpha\beta\,..\,\varkappa\,r} + \frac{2(\alpha-2)(\beta-2)\,..\,(\varkappa-2)}{\alpha\beta\,..\,\varkappa\,r^2} + \frac{3(\alpha-3)(\beta-3)\,..\,(\varkappa-3)}{\alpha\beta\,..\,\varkappa\,.\,r^3} +$$

$$.. = \frac{\alpha}{\alpha}\Big[\frac{(\beta-1)\,..\,(\varkappa-1)}{\beta\,..\,\varkappa\,r} + \frac{2(\beta-2)\,..\,(\varkappa-2)}{\beta\,..\,\varkappa\,r^2} + \frac{3(\beta-3)\,..\,(\varkappa-3)}{\beta\,..\,\varkappa\,r^3} +$$

$$.. \Big] - \frac{1}{\alpha}\Big[\frac{(\beta-1)\,..\,(\varkappa-1)}{\beta\,..\,\varkappa\,r} + \frac{2\,.\,2(\beta-2)\,..\,(\varkappa-2)}{\beta\,..\,\varkappa\,r^2} + \frac{3\,.\,3(\beta-3)\,..\,(\varkappa-3)}{\beta\,..\,\varkappa\,r^3} +$$

$$..\Big] = L\,\overline{b\,..\,k} - \frac{1}{\alpha}\,L^2\,\overline{b\,..\,k},$$ wo $L^2\,\overline{b\,..\,k}$

eine nach den Quadraten der natürlichen Zahlen steigende Leibrente für die Verbindung unter den Personen vom Alter b .. k bedeutet.

Anm. 1. Die Formel $\int \frac{(\alpha-x)(\beta-x)\,..\,(\varkappa-x)\,x\,dx}{\alpha\quad\beta\quad..\quad\varkappa\quad rx}$

giebt zwar auch den Werth einer steigenden Verbindungsrente. Diese letzte Rente steigt aber nicht im Anfange jedes Jahrs

um 1, sondern fängt im ersten Jahre an mit o und steigt continuirlich bis 1, im zweiten Jahre wächst sie continuirlich von 1 bis 2 etc. Uebrigens ist $\int \frac{(\alpha - x)(\beta - x) \ldots (\varkappa - x)\, x\, dx}{\alpha \quad \beta \ldots \varkappa \quad rx}$

$= \frac{1}{\alpha\beta \ldots \varkappa} (\alpha\beta \ldots \varkappa \int \frac{x\, dx}{rx} - P \int \frac{x^2\, dx}{rx}$

$+ Q \int \frac{x^3\, dx}{rx} - R \int \frac{x^4\, dx}{rx} + \ldots \mp$

$\int \frac{x^{m+1}\, dx}{rx}$), wo P, Q, R etc. die schon angegebene Bedeutung haben, und die Integrale $\int \frac{x\, dx}{rx}$, $\int \frac{x^2\, dx}{rx}$ etc. nach §. 42 gefunden werden, wenn nach der Integration $x = \varkappa$, d. h. der kleinsten Altersergänzung gleich, gesetzt wird.

Anm. 2. Aus dem Vorhergehenden hat man auch $\lambda a_m = \lambda a_{m-1} - \frac{1}{\alpha} L a_{m-1}$, imgleichen $\lambda a_m = \pi - \frac{m\pi}{\alpha} \lambda a_{m-1}$. Hieraus ergiebt sich $L a_{m-1} = (\alpha + m\pi) \lambda a_{m-1} - \pi a$, also auch $L a_m = (\alpha + \overline{m+1} \cdot \pi) \lambda a_m - \pi\alpha$. Wenn man aber in $\lambda a_m = \lambda a_{m-1} - \frac{1}{\alpha} L a_{m-1}$, anstatt λa_{m-1} setzt $\pi - \frac{(m-1)\pi}{\alpha} \lambda a_{m-2}$, so erhält man $L a_{m-1} = \pi (m \lambda a_{m-1} - \overline{m-1} . \lambda a_{m-2})$, also auch $L a_m = \pi (\overline{m+1} \lambda a_m - m \lambda a_{m-1})$. (Vergl. §. 162). Diese Formeln gelten jedoch nur für die Verbindungsrenten nach der Hypothese, in augenblicklichen Terminen zahlbar.

§. 251.

Für *jede Sterbensordnung* wird die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigende Verbindungsrente, auf ganze Jahre gerechnet, aus der einfachen Verbindungsrente folgendermaafsen gefunden.

Es ist diese steigende Verbindungsrente oder $L\overline{ab..k}$

$$= \frac{A^1 B^1 .. K^1}{A B .. K r} + \frac{2.A^2 B^2 .. K^2}{A B .. K r^2} +$$

$$\frac{3.A^3 B^3 .. K^3}{A B .. K r^3} + ..$$ folglich $(r-1)\, L\overline{ab..k} =$

$$\frac{A^1 B^1 .. K^1}{A B .. K} + \frac{2.A^2 B^2 .. K^2}{AB .. K r} + \frac{3.A^3 B^3 .. K^3}{A B .. K r^2} + ..$$

$$- \frac{A^1 B^1 .. K^1}{AB .. K r} - \frac{2.A^2 B^2 .. K^2}{A B .. K r^2} - ..$$

$$= \frac{AB .. K}{AB .. K} - \frac{\Delta(AB..K)}{AB .. K} + \frac{2A^1 B^1 .. K^1}{AB .. K r} - \frac{2\Delta(A^1 B^1 .. K^1)}{AB .. K r}$$

$$- \frac{A^1 B^1 .. K^1}{AB .. K r} \Big\} =$$

$$= \Big\{ + \frac{3.A^2 B^2 .. K^2}{AB .. K r^2} - \frac{3.\Delta(A^2 B^2 .. K^2)}{A B .. K r^2} + ..$$

$$- \frac{2.A^2 B^2 .. K^2}{AB .. K r^2} \qquad - ..$$

$$= 1 + \frac{A^1 B^1 .. K^1}{A B .. K r} + \frac{A^2 B^2 .. K^2}{A B .. K r^2}$$

$$+ .. - \frac{\Delta(AB .. K)}{A B .. K} - \frac{2.\Delta(A^1 B^1 .. K^1)}{A B .. K r}$$

$$- \frac{3.\Delta(A^2 B^2 .. K^2)}{A B .. K r^2} - .. = 1 + \lambda\overline{ab..k}$$

$-f^2 \frac{\Delta\ (A^{o}\ B^{o}\ ..\ K^{o})}{A\ B\ ..\ K\ r^{o}}$. Folglich erhält man

$L\ \overline{ab\ ..\ k} = p\ (1 + \lambda\ \overline{ab\ ..\ k} - f^2 \frac{\Delta\ (A^{o}\ B^{o}\ ..\ K^{o})}{A\ B\ ..\ K\ r^{o}})$. [Vergleiche §. §. 83 und 158).

Anm. Um $f^2 \frac{\Delta\ (A^{o}\ B^{o}\ ..\ K^{o})}{A\ B\ ..\ K\ r^{o}}$ unmittelbar zu finden, müfste man $\frac{\Delta\ (A\ B\ ..\ K)}{A\ B\ ..\ K}$, $\frac{\Delta\ (A^{1}\ B^{1}\ ..\ K^{1})}{A\ B\ ..\ K\ r}$, $\frac{\Delta\ (A^{2}\ B^{2}\ ..\ K^{2})}{A\ B\ ..\ K\ r^{2}}$ etc. bis zur Altersergänzung der ältsten Person berechnen, dann diese Zahlen von unten an summiren, und zuletzt die Summe der Summen suchen. Auch könnte man $f^2 \frac{\Delta\ (A^{o}\ B^{o}\ ..\ K^{o})}{A\ B\ ..\ K\ r^{o}}$ auf die nämliche Weise, wie oben §. 158 für $f^2 \frac{\Delta\ (A^{o}\ B^{o})}{A\ B\ r^{o}}$ gezeigt ist, aus kleinern Theilen zusammensetzen. Indefsen werden der Theile dann auch mehr, und die Operationen werden vervielfältigt. Abgerechnet, dafs man hiebey leichter einen Fehler begehen kann, wird das Resultat am Ende, da vielleicht jedes Stück wegen der Decimaltheile etwas zu grofs oder etwas zu klein ist, weniger zuverläfsig, und die Arbeit nimmt vielleicht eben so viel Zeit weg, als wenn man $f^2 \frac{\Delta\ (A^{o}\ B^{o}\ ..\ K^{o})}{A\ B\ ..\ K\ r^{o}}$ unmittelbar sucht. Indefsen möchte es wohl noch mehr vorzuziehen seyn, diese steigenden Verbindungsrenten nach der Grundformel $L\ \overline{ab\ ..\ k} = \frac{A^{1}\ B^{1}\ ..\ K^{1}}{A\ B\ ..\ K\ r} +$

$\frac{2\,A^{\text{II}}\,B^{\text{II}}\,..\,K^{\text{II}}}{A\,B\,..\,K\,r^2}$ † .. auf eine ähnliche Weise, wie oben §. 244 Anm. 2. in Ansehung der unveränderlichen Verbindungsrenten angeführt worden, zu berechnen.

§. 252.

Noch ist $\frac{A^{\text{I}}\,B^{\text{I}}\,..\,K^{\text{I}}}{A\,B\,..\,K\,r} + \frac{2\,A^{\text{II}}\,B^{\text{II}}\,..\,K^{\text{II}}}{A\,B\,..\,K\,r^2}$

$+ \frac{3\,A^{\text{III}}\,B^{\text{III}}\,..\,K^{\text{III}}}{AB\,..\,K\,r^3} + .. = \frac{(A - \Delta A)\,B^{\text{I}}\,..\,K^{\text{I}}}{A\,B\,..\,K\,r}$

$+ \frac{2\,(A - \Delta A - \Delta A^{\text{I}})\,B^{\text{II}}\,..\,K^{\text{II}}}{A\,B\,..\,K\,r^2}$

$+ \frac{3\,(A - \Delta A - \Delta A^{\text{I}} - \Delta A^{\text{II}})}{A} \times$

$\frac{B^{\text{III}}\,..\,K^{\text{III}}}{B\,..\,K\,r^3} + .. = (\frac{B^{\text{I}}\,..\,K^{\text{I}}}{B\,..\,K\,r} + \frac{2\,B^{\text{II}}\,..\,K^{\text{II}}}{B\,..\,K\,r^2}$

$+ \frac{3\,B^{\text{III}}\,..\,K^{\text{III}}}{B\,..\,K\,r^3} + ..) - \frac{\Delta A}{A}\,(\frac{B^{\text{I}}\,..\,K^{\text{I}}}{B\,..\,K\,r}$

$+ \frac{2\,B^{\text{II}}\,..\,K^{\text{II}}}{B\,..\,K\,r^2} + \frac{3\,B^{\text{III}}\,..\,K^{\text{III}}}{B\,..\,K\,r^3}) -$

$\frac{\Delta A^{\text{I}}}{A}\,(\frac{2\,B^{\text{II}}\,..\,K^{\text{II}}}{B\,..\,K\,r^2} + \frac{3\,B^{\text{III}}\,..\,K^{\text{III}}}{B\,..\,K\,r^3}$

$+ ..) - \frac{\Delta A^{\text{II}}}{A}\,(\frac{3\,B^{\text{III}}\,..\,K^{\text{III}}}{B\,..\,K\,r^3} + ..).$

Da nun $\frac{B^{\text{I}}\,..\,K^{\text{I}}}{B\,..\,K\,r} + \frac{2\,B^{\text{II}}\,..\,K^{\text{II}}}{B\,..\,K\,r^2}$

$+ .. = \overline{L\,b\,..\,k}$, ferner $\frac{2\,B^{\text{II}}\,..\,K^{\text{II}}}{B\,..\,K\,r^2} +$

$$\frac{3\,B^{\frac{1}{3}}\,..\,K^{\frac{1}{3}}}{B\,..\,K\,r^{3}} + .. = \frac{B^{\frac{1}{x}}\,..\,K^{\frac{1}{x}}}{B\,..\,K\,r} \times$$

$$[\lambda\,\overline{(b+1)\,..\,(k+1)} + L\,\overline{(b+1)\,..\,(k+1)}],$$

ebenfalls $\frac{3\,B^{\frac{1}{3}}\,..\,K^{\frac{1}{3}}}{B\,..\,K\,r^{3}} + \frac{4\,B^{\frac{1}{4}}\,..\,K^{\frac{1}{4}}}{B\,..\,K\,r^{4}}$

$$+ .. = \frac{B^{\frac{1}{2}}\,..\,K^{\frac{1}{2}}}{B\,..\,K\,r^{2}}\,[2.\lambda\,\overline{(b+2)\,..\,(k+2)} +$$

$L\,\overline{(b+2)\,..\,(k+2)}]$ etc., so ist $L\,\overline{ab\,..\,k} =$

$$L\,\overline{b\,..\,k} - \frac{\triangle A}{A}\,L\,\overline{b\,..\,k} - \frac{\triangle A^{\frac{1}{x}}}{A} \cdot \frac{B^{\frac{1}{x}}\,..\,K^{\frac{1}{x}}}{B\,..\,Kr} \times$$

$$[\lambda\,\overline{(b+1)\,..\,(k+1)} + L\,\overline{(b+1)\,..\,(k+1)}]$$

$$- \frac{\triangle A^{\frac{1}{2}}}{A} \cdot \frac{B^{\frac{1}{2}}\,..\,K^{\frac{1}{2}}}{B\,..\,K\,r^{2}}\,[2.\lambda\,\overline{(b+2)\,..\,(k+2)}$$

$+ L\,\overline{(b+2)\,..\,(k+2)}] - ..$, wonach die steigende Verbindungsrente auf eine ähnliche Art wie die einfache zusammengesetzt werden kann.

Anm. Wenn die Decremente gleich, nämlich jedes $= \frac{1}{\alpha}$, sind, so verwandelt sich die oben angegebene Formel in

$L\,\overline{ab\,..\,k} = L\,\overline{b\,..\,k} - \frac{1}{\alpha}\,L^{2}\,\overline{b\,..\,k}$, die bereits vorher §. 250 angeführt worden.

§. 253.

Soll eine unveränderliche *Verbindungsrente um n Jahre aufgeschoben* werden, so fallen in der vorhin §. 243 angeführten Reihe die ersten n Glieder weg, und der baare Werth dieser Rente, auf ganze

Jahre gerechnet, ist $= \frac{A^{\overline{n+1}}\, B^{\overline{n+1}} \,..\, K^{\overline{n+1}}}{A\,B\,..\,K\,r^{n+1}}$

$+ \frac{A^{\overline{n+2}}\, B^{\overline{n+2}} \,..\, K^{\overline{n+2}}}{A\,B\,..\,K\,r^{n+2}} + ..$ Nun ist

$\frac{A^{\overline{n+1}}\, B^{\overline{n+1}} \,..\, K^{\overline{n+1}}}{A\,B\,..\,K\,r^{n+1}} +$

$\frac{A^{\overline{n+2}}\, B^{\overline{n+2}} \,..\, K^{\overline{n+2}}}{A\,B\,..\,K\,r^{n+2}} + .. =$

$\frac{A^{n}\, B^{n} \,..\, K^{n}}{A\,B\,..\,K\,r^{n}} \left(\frac{A^{\overline{n+1}}\, B^{\overline{n+1}} \,..\, K^{\overline{n+1}}}{A^{n}\, B^{n} \,..\, K^{n}\, r} \right.$

$\left. + \frac{A^{\overline{n+2}}\, B^{\overline{n+2}} \,..\, K^{\overline{n+2}}}{A^{n}\, B^{n} \,..\, K^{n}\, r^{2}} + ..\right) =$

$\frac{A^{n}\, B^{n} \,..\, K^{n}}{A\,B\,..\,K\,r^{n}}\ \lambda\overline{(a+n)\,(b+n)\,..\,(k+n)}.$

Wenn man also die um n Jahre aufgeschobene Verbindungsrente mit $\lambda\overline{a\,b\,..\,k}^{\,n+1}$ bezeichnet, so ist

$\lambda\overline{a\,b\,..\,k}^{\,n+1} = \frac{A^{n}\, B^{n} \,..\, K^{n}}{A\,B\,..\,K\,r^{n}} \times$

$\lambda\overline{(a+n)\,(b+n)\,..\,(k+n)}.$ (Vergl. §. 156).

Anm. Die Verbindungsrente für die Personen vom Alter $a+n, b+n\,..\,k+n$ ist $= \lambda\overline{(a+n)\,(b+n)\,..\,(k+n)}$, und ihr jetziger Werth $= \frac{1}{r^{n}}\,\lambda\overline{(a+n)\,(b+n)\,..\,(k+n)}.$

Die Wahrscheinlichkeit aber, dafs die ungetrennte Verbindung unter den Personen vom Alter a, b .. k am Ende des nten Jahrs noch bestehe, ist $= \frac{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} .. K^{\overline{n}}}{AB .. K}$; folglich ist auch hienach der Werth der um n Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente für die letztgedachten Personen $=$

$$\frac{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} .. K^{\overline{n}}}{AB .. K} \; \overline{\lambda (a \dagger n)(b \dagger n) .. (k \dagger n)}_{rn}.$$

§. 254.

Wenn die *Verbindungsrente* unter m Personen *mit dem nten Jahre aufhören* sollte, so müfste man von dem gegenwärtigen Werthe der vollen Verbindungsrente den gegenwärtigen Werth der um n Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente abziehen. Bezeichnet man also allgemein die am Ende des nten Jahrs aufhörende Verbindungsrente mit $\overline{\lambda ab .. k}^{n}$, so ist $\overline{\lambda ab .. k}^{n} = \lambda \overline{ab .. k} - \overline{\lambda ab .. k}^{n \dagger 1}$. Beide Renten zusammengenommen, nämlich die mit dem nten Jahre aufhörende und die mit dem $n \dagger 1$ten anfangende, geben begreiflich wieder den gegenwärtigen Werth der vollen Verbindungsrente.

§. 255.

Soll die Verbindungsrente um n Jahre aufge-

schoben seyn und zugleich nach $\overline{n + m}$ Jahren wieder aufhören, so sucht man die um n Jahre, imgleichen die um $\overline{n + m}$ Jahre aufgeschobene Verbindungsrente für die gegebenen Personen und zieht von der erstern die letztere ab, wo dann die Differenz den gesuchten Werth giebt, welches aus dem Vorhergehenden von selbst folgt.

§. 256.

Wenn *die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigende Verbindungsrente* um n Jahre *aufgeschoben* werden soll, so findet man den Werth derselben auf eine ähnliche Art wie in den §. §. 163 und 164 angegeben ist. Falls nämlich diese Rente im $n + 1$ten Jahre mit 1 anfangen und jährlich um 1 steigen soll, so ist ihr baarer Werth =

$$\frac{1}{ABC\,..\,K}\left(\frac{A^{n+1}\,B^{n+1}\,..\,K^{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{2.A^{n+2}\,B^{n+2}\,C^{n+2}\,..\,K^{n+2}}{r^{n+2}} + ..\right) =$$

$$\frac{A^{n}\,B^{n}\,C^{n}\,..\,K^{n}}{ABC\,..\,K\,r^{n}}\left(\frac{A^{n+1}\,B^{n+1}\,C^{n+1}\,..\,K^{n+1}}{A^{n}\,B^{n}\,C^{n}\,..\,K^{n}\,r} + \frac{2.A^{n+2}\,B^{n+2}\,C^{n+2}\,..\,K^{n+2}}{A^{n}\,B^{n}\,C^{n}\,..\,K^{n}\,r^{2}} + ..\right) =$$

$$\frac{A^{n}B^{n}C^{n}..K^{n}}{ABC..K\,rn}\;L\,\overline{(a\dagger n)(b\dagger n)(c\dagger n)..(k\dagger n)}.$$

Wenn aber die Rente im $n\dagger$ Iten Jahre mit $n\dagger 1$ anfangen sollte, so bestände sie aus n aufgeschobenen unveränderlichen, jede mit 1 Rthlr. zu zahlenden, Verbindungsrenten, und einer aufgeschobenen, mit 1 anfangenden nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden, Verbindungsrente. Folglich wäre dann der Werth der Rente =

$$\frac{A^{n}B^{n}C^{n}..K^{n}}{ABC..K\,rn}\,[n.\lambda\,\overline{(a\dagger n)(b\dagger n)(c\dagger n)..(k\dagger n)}$$

$$+\;L\,\overline{(a\dagger n)(b\dagger n)(c\dagger n)..(k\dagger n)}\,].$$

§. 257.

Falls die steigende Verbindungsrente mit dem Ablaufe des nten Jahrs aufhören sollte, so müfste man von dem gegenwärtigen Werthe der vollen steigenden Verbindungsrente den baaren Werth der um n Jahre aufgeschobenen, im $n\dagger$ Iten Jahre mit $n\dagger 1$ anfangenden und jährl. mit 1 steigenden, Verbindungsrente abziehen, d. h. es wäre der gesuchte Werth $=L\,\overline{abc..k}-\frac{A^{n}B^{n}C^{n}..K^{n}}{ABC..K\,rn}\times$

$$[n.\lambda\,\overline{(a\dagger n)(b\dagger n)(c\dagger n)..(k\dagger n)}\;+$$

$$L\,\overline{(a\dagger n)(b\dagger n)(c\dagger n)..(k\dagger n)}\,].$$

§. 258.

Sollte auch die steigende Rente mit dem $\overline{n \dagger 1}$ten Jahre anfangen und mit dem $\overline{n \dagger m}$ten Jahre aufhören, so suchte man den Werth der um n so wie der um n † m Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente und zöge den letzteren von dem ersteren ab, wo dann der Unterschied die gesuchte Rente giebt. Dafs hiebey zu beobachten, ob die Rente im Jahre $\overline{n \dagger 1}$ mit 1 oder mit $\overline{n \dagger 1}$ anfange, und danach der Werth der aufgeschobenen Verbindungsrente zu bestimmen sey, ergiebt sich von selbst.

Anm. Was übrigens den Gebrauch der Verbindungsrenten betrifft, so bemerke ich noch, dafs sie nicht nur da, wo mehrere Personen gemeinschaftlich eine Rente beziehen, imgleichen als unentbehrliches Hülfsmittel bey allen Ueberlebensrenten, Renten auf das längste Leben und Anwartschaften unter mehreren Personen, sondern überhaupt da anzuwenden sind, wo die Rente von dem Leben zweier oder mehrerer Personen abhängt. So ist z. B. der Werth der Rente, die A während seines Lebens an F bezahlen soll, so lange er lebt, oder an F und G, so lange sie zusammenleben, der Werth einer Verbindungsrente im ersten Falle für A F, im letztern Falle für A F G. Sollte dagegen A während seines Lebens eine Rente an F G bezahlen, so lange irgend einer von ihnen lebt, so wäre dies eine Rente auf die längste Verbindung nach 2 unter den drey Personen, worin A enthalten ist, wovon im achten Kapitel gehandelt wird.

Siebentes Kapitel.

Von

Ueberlebensrenten

unter mehreren Personen.

§. 259.

Eine Ueberlebensrente soll hier allgemein eine Rente heifsen, welche, wenn anfänglich eine Verbindung der Personen nach m existirt, irgend ein Verein von m — u Personen, so lange sie alle zusammenleben, nach dem Tode der übrigen u, folglich nachdem die letzte derselben gestorben ist, oder auch eine einzelne Person, nach dem Tode aller übrigen anfänglichen Mitverbundenen, genieſst. Wenn z. B. anfänglich drey Personen verbunden sind und zuerst das Ueberleben *collectiv* genommen wird, so kann also gefragt werden nach der Lebens-Rente für zwey Personen so lange sie zusammenleben, nachdem die eine Person abgegangen ist, und nach der Lebens-Rente einer einzelnen Person, nachdem die andern beiden verstorben sind.

§. 260.

Wenn nun anfänglich m Personen von gleichem Alter a verbunden wären und nach der *Hypothese*

vom gleichmäfsigen Absterben gerechnet, auch die Renten in augenblicklichen Terminen bezahlt werden sollten, so wäre der baare Werth der Ueberlebensrente für die Verbindung vom Exponenten m—u

$$= \int \frac{(\alpha - x)^{m-u}\, x^u\, dx}{\alpha^m \quad rx} = \int \frac{x^u \quad dx}{\alpha^u \quad rx} -$$

$$\frac{m-u}{1} \int \frac{x^{u+1}}{\alpha^{u+1}} \frac{dx}{rx} + \frac{m\text{-}u.m\text{-}u\text{-}1}{1 \cdot 2} \int \frac{x^{u+2} \quad dx}{\alpha^{u+2} \quad rx}$$

$$- \ldots \pm \int \frac{x^m \quad dx}{\alpha^m \quad rx},$$

wo man also m—u + 1 Theile hat. Das Integral eines jeden Theils findet man nach §. 40, und nach der Integration mufs man $x = \alpha$ setzen, um den Werth für das ganze Ueberleben zu finden.

Wäre also z. B. $m = 3$, und $u = 1$, so wäre die Ueberlebensrente $= \int \frac{x}{\alpha} \frac{dx}{rx} - 2\int \frac{x^2\, dx}{\alpha^2 \quad rx}$

$$+ \int \frac{x^3\, dx}{\alpha^3 \quad rx} = \frac{1}{\alpha} \left[\pi^2 \left(1 - \frac{1}{r\alpha}\right) - \frac{\pi\alpha}{r\alpha}\right]$$

$$- \frac{2}{\alpha^2} \left[2\pi^3 \left(1 - \frac{1}{r\alpha}\right) - \frac{\pi\alpha^2 + 2\pi^2\alpha}{r\alpha}\right]$$

$$+ \frac{1}{\alpha^3} \left[6\pi^4 \left(1 - \frac{1}{r\alpha}\right) - \frac{\pi\alpha^3 + 3\pi^2\alpha^2 + 6\pi^3\alpha}{r\alpha}\right].$$

§. 261.

Sollen ferner anfänglich m Personen, nämlich eine vom Alter a, eine vom Alter b etc. bis k, verbunden und das Alter der überlebenden m — u Perso-

nen a, b bis d seyn, so ist die Ueberlebensrente, nach der Hypothese, und am Ende des Jahrs zahlbar an diejenigen Vereine vom Grade m—u, die dann noch bestehen, $= \frac{1}{\alpha\beta..\varkappa} \int \frac{(\alpha - n)\ (\beta - n)\ ..\ (\delta - n)\ n^u}{r^n}$.

Wenn man nun die Summe aller Verbindungen nach $m - u - 1$ unter den Factoren $\alpha\beta..\delta$ mit P, die Summe aller Verbindungen nach $m - u - 2$ unter denselben Zahlen mit Q etc. bezeichnet, so hat man diese Ueberlebensrente $=$

$$\frac{1}{\alpha\beta..\varkappa}\left(\alpha\beta..\delta \int \frac{n^u}{r^n} - P \int \frac{n^{u+1}}{r^n} + Q \int \frac{n^{u+2}}{r^n} - R \int \frac{n^{u+3}}{r^n} + .. \mp T \int \frac{n^{m-1}}{r^n} \pm \int \frac{n^m}{r^n}\right).$$

Hier wird n der kleinsten Altersergänzung gleich gesetzt, und man erhält dann den Werth eines jeden Theils nach §. 39.

Es ist jedoch diese Formel unverändert nur dann anwendbar, wenn die kleinste Altersergänzung einer der überlebenden Personen zugehört; denn die Formel giebt den Werth nur bis zum Ableben der ältsten Person. Wenn aber die älteste der überlebenden Personen jünger ist als die älteste der zu überlebenden, so giebt es noch Vereine der m — u Personen über die Zeit hinaus, worauf hier gerechnet wird, und darüber mufs noch eine besondre Rechnung angestellt werden. (Vergl. §. 221). Eben daher ist es auch

zuträglicher, die Ueberlebensrente nach der im folgenden §. angeführten allgemeinen Formel zu bestimmen.

§. 262.

Wird im Allgemeinen, *nach jeder Sterbensordnung ohne Unterschied*, bey einer anfänglichen Verbindung der Personen von den Altern a, b, c, d, f, g, h, nämlich einer einzigen Person von jedem Alter, die am Ende des Jahrs zahlbare Ueberlebensrente für die verbundenen Personen vom Alter a, b, c, d, (das ist die Rente, die nach dem Abgange aller übrigen Personen an die dann noch bestehenden Vereine aus A B C D bezahlt werden soll) gesucht, und ist die anfängliche Anzahl der Vereine aus denselben Personen $= A\,B\,C\,D\,F\,G\,H$, so ist der gegenwärtige Werth der am Ende des nten Jahrs zahlbaren Rentensumme, über alle anfängliche Vereine vertheilt, $=$

$$\frac{A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}\,C^{\overline{n}}\,D^{\overline{n}}\,(F-F^{\overline{n}})\,(G-G^{\overline{n}})\,(H-H^{\overline{n}})}{A\,B\,C\,D\,F\,G\,H\qquad\qquad r^{n}},$$

und der jetzige Werth der Ueberlebensrente ist $=$

$$\int \frac{A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}\,C^{\overline{n}}\,D^{\overline{n}}\,(F-F^{\overline{n}})\,(G-G^{\overline{n}})\,(H-H^{\overline{n}})}{A\,B\,C\,D\,F\,G\,H\qquad\qquad r^{n}},$$

wo die Reihe so lange fortgeht, bis n der kleinsten Altersergänzung unter den überlebenden Personen gleich wird. Wenn man diesen Ausdruck auf eine ähnliche Weise, wie im §. 222 gezeigt worden, in

seine Theile auflöset, so erhält man die Ueberlebens-

$$\text{rente} = \int \frac{A^{n} B^{n} C^{n} D^{n}}{A\,B\,C\,D\ rn} -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{A^{n} B^{n} C^{n} D^{n} F^{n}}{A\,B\,C\,D\,F\ rn} \\ \int \frac{A^{n} B^{n} C^{n} D^{n} G^{n}}{A\,B\,C\,D\,G\ rn} \\ \int \frac{A^{n} B^{n} C^{n} D^{n} H^{n}}{A\,B\,C\,D\,H\ rn} \end{array} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{A^{n} B^{n} C^{n} D^{n} F^{n} G^{n}}{A\,B\,C\,D\,F\,G\ rn} \\ \int \frac{A^{n} B^{n} C^{n} D^{n} F^{n} H^{n}}{A\,B\,C\,D\,F\,H\ rn} \\ \int \frac{A^{n} B^{n} C^{n} D^{n} G^{n} H^{n}}{A\,B\,C\,D\,G\,H\ rn} \end{array} \right\}$$

$$- \int \frac{A^{n} B^{n} C^{n} D^{n} F^{n} G^{n} H^{n}}{A\,B\,C\,D\,F\,G\,H\ rn} =$$

$$\lambda\, \overline{abcd} - (\lambda\, \overline{abcdf} + \lambda\, \overline{abcdg} + \lambda\, \overline{abcdh}) + (\lambda\, \overline{abcdfg} + \lambda\, \overline{abcdfh} + \lambda\, \overline{abcdgh}) - \lambda\, \overline{abcdfgh}.$$

Wenn man ferner diejenigen Theile, welche gleich viel Dimensionen haben, in ein einziges Glied zusammenfafst, so ist hier das erste Glied die Verbindungsrente für die vier überlebenden Personen

A B C D; das zweite Glied ist die Summe der Verbindungsrenten für die gedachten vier Personen zusammengenommen mit je einer der drey andern zu überlebenden, das dritte Glied ist die Summe der Verbindungsrenten für die nämlichen vier Personen zusammengenommen mit je zwey der drey zu überlebenden Personen, so wie das letzte Glied die Verbindungsrente für alle sieben Personen zusammengenommen ist, wobey übrigens die Zeichen der Glieder abwechseln. Bezeichnet man nun die Verbindungsrente für die bestimmten vier Personen mit $\lambda\ \overline{\text{IV}}$, die Verbindungsrente für diese vier Personen mit je einer oder je zwey etc. der übrigen Personen mit $\lambda\ \overline{\text{IV.I}}$ oder $\lambda\ \overline{\text{IV.II}}$ etc., imgleichen die Summen dieser Verbindungsrenten mit $S.\lambda\ \overline{\text{IV . I}}$, $S.\lambda\ \overline{\text{IV.II}}$ etc., so kann man die vorhergehende Formel auch ausdrucken durch $\lambda\ \overline{\text{IV}} - S.\lambda\ \overline{\text{IV.I}} + S.\lambda\ \overline{\text{IV.II}} - \lambda\ \overline{\text{IV.III}}$.

Es ergiebt sich auch aus §. 222, dafs dafselbe Gesetz für die Ueberlebensrenten aller Grade gelte, und dafs, wenn anfänglich eine Verbindung von m Personen existirt und dieser Verein mit M, ferner die Verbindungsrente für die bestimmten m — u oder n Personen mit λ N, die Verbindungsrente für diese nämlichen n Personen zusammengenommen mit irgend einer der andern u Personen mit $\lambda\ \overline{\text{N.I}}$, und überhaupt die Verbindungsrente für das Zusammenleben derselben n Personen mit je x Personen

unter den übrigen u mit $\lambda\,\overline{N.X}$, imgleichen die Summen dieser Verbindungsrenten mit $S.\lambda\,\overline{N.I}$, $S.\lambda\,\overline{N.X}$ etc. bezeichnet werden, die Ueberlebensrente für die n Personen allgemein sey $= \lambda N - S.\lambda\,\overline{N.I} + S.\lambda\,\overline{N.II} - S.\lambda\,\overline{N.III} + .. \pm S.\lambda\,\overline{N.(U-I)} \mp \lambda M$.

§. 263.

Wenn also bey der anfänglichen Verbindung von AB die Ueberlebensrente von A gesucht wird, so ist sie hienach $= \lambda a - \lambda\,\overline{ab}$. (§. 166).

Besteht die anfängliche Verbindung aus drey Personen A B C, so ist die Ueberlebensrente für die beiden verbundenen Personen $AB = \lambda\,\overline{ab} - \lambda\,\overline{abc}$, die Ueberlebensrente für die eine Person A nach dem Tode der beiden andern $= \lambda a - (\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac}) + \lambda\,\overline{abc}$.

Sind anfänglich vier Personen A B C D verbunden, so ist die Ueberlebensrente des Vereins $ABC = \lambda\,\overline{abc} - \lambda\,\overline{abcd}$, die Ueberlebensrente der zwey verbundenen Personen AB nach dem Tode der beiden andern $= \lambda\,\overline{ab} - (\lambda\,\overline{abc} + \lambda\,\overline{abd}) + \lambda\,\overline{abcd}$, endlich die Ueberlebensrente der einen Person A nach dem Ableben der drey übrigen $=$

$$\lambda a - (\lambda \overline{ab} + \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{ad}) + (\lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{acd}) - \lambda \overline{abcd} \text{ etc.}$$

§. 264.

Wenn die Ueberlebensrente nicht blofs auf ganze Jahre, sondern auf alle Theile des Jahrs, berechnet werden sollte, so müfste man, in Uebereinstimmung mit dem, was im §. 223 in Ansehung der Ueberlebensdauer angeführt worden, in der im vorigen §. angeführten Formel anstatt der Verbindungsrenten auf ganze Jahre durchgängig die vollständigen Verbindungsrenten mit der Correction nehmen, und zwar entweder in augenblicklichen Terminen oder am Ende des Jahrs zahlbar, je nachdem die Ueberlebensrente entweder in augenblicklichen Terminen oder am Ende des Jahrs bezahlt werden sollte.

§. 265.

Soll das Ueberleben *disjunctiv* genommen werden, also bey einer anfänglichen Verbindung von m Personen eine derselben oder einige zusammengenommen eine Ueberlebensrente geniefsen, so bald irgend eine oder irgend einige der übrigen todt sind, so müfsen die Renten für die Combinationen, für welche die gegebenen Bedingungen Statt finden,

zusammengenommen werden, um den Werth der gesuchten Rente zu erhalten.

Wenn also, bey einer anfänglichen Verbindung von drey Personen A B C, A die Rente haben soll, sobald irgend eine der beiden Personen todt ist, folglich auch wenn sie beide gestorben sind, so ist der gesammte Werth der Ueberlebensrente =

$$\int \frac{A^{n} B^{n} (C - C^{n})}{A\,B\,C\ rn} + \int \frac{A^{n} C^{n} (B - B^{n})}{A\,B\,C\ rn}$$

$$+ \int \frac{A^{n} (B - B^{n}) (C - C^{n})}{A\,B\,C\ rn} = \lambda\, a\, b -$$

$$\lambda\, abc + \lambda\, ac - \lambda\, abc + \lambda\, a - \lambda\, ab - \lambda\, ac +$$

$$\lambda\, abc = \lambda\, a - \lambda\, abc.$$

Bestände die anfängliche Verbindung aus vier Personen und sollte z. B. A die Rente beziehen, sobald irgend zwey der andern Personen todt wären, so erhielte man den Werth =

$$\int \frac{A^{n} B^{n} (C - C^{n}) (D - D^{n})}{A\,B\,C\,D\ rn} +$$

$$\int \frac{A^{n} C^{n} (B - B^{n}) (D - D^{n})}{A\,B\,C\,D\ rn} +$$

$$\int \frac{A^{n} D^{n} (B - B^{n}) (C - C^{n})}{A\,B\,C\,D\ rn} +$$

$$\int \frac{A^{n} (B - B^{n}) (C - C^{n}) (D - D^{n})}{A\,B\,C\,D\ rn} =$$

$$\begin{aligned}
&\lambda a - \lambda \overline{ab} + \lambda \overline{abc} - \lambda \overline{abcd}\\
&\quad - \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{abd}\\
&\quad - \lambda \overline{ad} + \lambda \overline{acd}\\
&\quad + \lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abcd}\\
&\qquad\quad - \lambda \overline{abd}\\
&\quad + \lambda \overline{ac} - \lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abcd}\\
&\qquad\quad - \lambda \overline{acd}\\
&\quad + \lambda \overline{ad} - \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{abcd}\\
&\qquad\quad - \lambda \overline{acd}
\end{aligned}$$

$$= \lambda a - (\lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{acd}) + 2\lambda \overline{abcd}.$$

Sollen bey derselben anfänglichen Verbindung A und B zusammen die Rente genieſsen, sobald irgend eine der beiden andern Personen todt ist, so wäre der Werth der Rente =

$$\int \frac{\overset{n}{A\!\!-}\ \overset{n}{B\!\!-}\ \overset{n}{C\!\!-}\ (D - \overset{n}{D\!\!-})}{A\ B\ C\ D\ rn} +$$

$$\int \frac{\overset{n}{A\!\!-}\ \overset{n}{B\!\!-}\ \overset{n}{D\!\!-}\ (C - \overset{n}{C\!\!-})}{A\ B\ C\ D\ rn} +$$

$$\int \frac{\overset{n}{A\!\!-}\ \overset{n}{B\!\!-}\ (C - \overset{n}{C\!\!-})\ (D - \overset{n}{D\!\!-})}{A\ B\ C\ D\ rn} =$$

$$\begin{aligned}
&\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abc} - \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{abcd}\\
&\quad + \lambda \overline{abc} \qquad\qquad - \lambda \overline{abcd}\\
&\qquad\qquad + \lambda \overline{abd} - \lambda \overline{abcd}
\end{aligned}$$

$$= \lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abcd}.$$

Anm. Wenn die Ueberlebensrente für eine Person oder einige Personen zusammengenommen gesucht wird, auf den Fall, dafs *irgend eine* der anfänglich verbundenen m Personen abgeht, so tritt der Fall der Hebung ein, sobald die Verbindung nach m aufhört, falls dann die eine oder diejenigen Personen zusammen noch leben, welche die Rente beziehen sollen. Wenn also die Verbindungsrente für die m Personen $=\overline{\lambda\,a\,b\,c\,d\,..\,k}$ ist und die Person A unter der vorgedachten Bedingung die Rente genieſsen soll, so ist der Werth $=\lambda\,a - \overline{\lambda\,a\,b\,c\,d\,..\,k}$. Sollten die vier Personen A B C D zusammen die Rente unter der angegebenen Bedingung haben, so wäre ihr Werth $=\overline{\lambda\,a\,b\,c\,d} - \overline{\lambda\,a\,b\,c\,d\,..\,k}$. Wenn aber mehrere Personen abgehen sollen, ehe die Rente bezahlt wird, so wird der Ausdruck für die letztere mehr zusammengesetzt, wie auch aus den angeführten Beispielen zu ersehen.

§. 266.

Auf eine ähnliche Art müfste man, wenn die Bedingungen noch mehr zusammengesetzt seyn sollten, wenn z. B. eine oder einige Personen, so lange sie mit einer oder einigen zusammenleben, nach dem Tode einer oder einiger unter den übrigen die Rente haben sollten, den Werth suchen.

Wenn z. B. bey einer anfänglichen Verbindung von drey Personen, A nach dem Tode irgend einer der übrigen die Rente genieſsen sollte, so lange er mit der dritten zusammenlebt, so wäre der Werth

der Rente $= \int \frac{\overset{n}{A} - \overset{n}{B} - (C - \overset{n}{C})}{A\,B\,C^{rn}}$

$$+\int\frac{A^{n}\,C^{n}\,(B-B^{n})}{A\,B\,C\;rn}=\lambda\,\overline{ab}-\lambda\,\overline{abc}$$

$$+\lambda\,\overline{ac}-\lambda\,\overline{abc}=\lambda\,\overline{ab}+\lambda\,\overline{ac}-2\,\lambda\,\overline{abc}.$$

Soll bey einer anfänglichen Verbindung von vier Personen A die Rente haben nach dem Tode irgend einer Person, solange er mit den andern beiden zusammenlebt, so ist der Werth =

$$\int\frac{A^{n}\,B^{n}\,C^{n}\,(D-D^{n})}{A\,B\,C\,D\;rn}+$$

$$\int\frac{A^{n}\,B^{n}\,D^{n}\,(C-C^{n})}{A\,B\,C\,D\;rn}+$$

$$\int\frac{A^{n}\,C^{n}\,D^{n}\,(B-B^{n})}{A\,B\,C\,D\;rn}=$$

$$\lambda\,\overline{abc}+\lambda\,\overline{abd}+\lambda\,\overline{acd}-3\,\lambda\,\overline{abcd}.$$

Falls bey derselben anfänglichen Verbindung A die Rente haben sollte, sobald irgend eine der andern Personen gestorben, so lange er selbst mit irgend einer zusammenlebt, so wäre der Werth der

$$\text{Rente}=\int\frac{A^{n}\,B^{n}\,C^{n}\,(D-D^{n})}{A\,B\,C\,D\;rn}+$$

$$\int\frac{A^{n}\,B^{n}\,D^{n}\,(C-C^{n})}{A\,B\,C\,D\;rn}+$$

$$\int\frac{A^{n}\,C^{n}\,D^{n}\,(B-B^{n})}{A\,B\,C\,D\;rn}+$$

$$\int \frac{A^{n} B^{n} (C - C^{n}) (D - D^{n})}{A\,B\,C\,D\ rn} +$$

$$\int \frac{A^{n} C^{n} (B - B^{n}) (D - D^{n})}{A\,B\,C\,D\ rn} +$$

$$\int \frac{A^{n} D^{n} (B - B^{n}) (C - C^{n})}{A\,B\,C\,D\ rn}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda\, \overline{ab} - \lambda\, \overline{abc} + \lambda\, \overline{abcd} \\
&\quad - \lambda\, \overline{abd} \\
&+ \lambda\, \overline{ac} - \lambda\, \overline{abc} + \lambda\, \overline{abcd} \\
&\quad - \lambda\, \overline{acd} \\
&+ \lambda\, \overline{ad} - \lambda\, \overline{abd} + \lambda\, \overline{abcd} \\
&\quad - \lambda\, \overline{acd} \\
&\quad + \lambda\, \overline{abc} - \lambda\, \overline{abcd} \\
&\quad + \lambda\, \overline{abd} - \lambda\, \overline{abcd} \\
&\quad + \lambda\, \overline{acd} - \lambda\, \overline{abcd}
\end{aligned}$$

$$= \lambda\, \overline{ab} + \lambda\, \overline{ac} + \lambda\, \overline{ad} - \lambda\, \overline{abc} - \lambda\, \overline{abd} - \lambda\, \overline{acd}.$$

Wenn endlich A nach dem Tode von irgend zwey Personen eine Rente beziehen sollte, so lange er mit der dritten Person zusammenlebt, so hätte man den Werth $= \int \frac{A^{n} B^{n} (C - C^{n}) (D - D^{n})}{A\,B\,C\,D\ rn}$

$$+\int \frac{\overset{n}{A}\overset{n}{C}(B-\overset{n}{B})(D-\overset{n}{D})}{A\,B\,C\,D\;{}^{n}r}$$

$$+\int \frac{\overset{n}{A}\overset{n}{D}(B-\overset{n}{B})(C-\overset{n}{C})}{A\,B\,C\,D\;{}^{n}r} =$$

$$\lambda\,\overline{ab} - \lambda\,\overline{abc} - \lambda\,\overline{abd} + \lambda\,\overline{abcd}$$
$$+\lambda\,\overline{ac} - \lambda\,\overline{abc} - \lambda\,\overline{acd} + \lambda\,\overline{abcd}$$
$$+\lambda\,\overline{ad} - \lambda\,\overline{abd} - \lambda\,\overline{acd} + \lambda\,\overline{abcd}$$

$$= \lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{ad} - 2\,(\lambda\,\overline{abc} + \lambda\,\overline{abd} + \lambda\,\overline{acd}) + 3\,\lambda\,\overline{abcd}.$$

Anm. Das disjunctive Ueberleben ist oft das Ueberleben einer längsten Verbindung, wovon weiter unten gehandelt werden wird; so ist z. B. in dem zuletzt angeführten Falle die Rente für das Ueberleben der längsten Verbindung zu zwey, worin A enthalter ist, zu suchen. Es lafsen sich aber nicht alle Aufgaben dieser Art auf das Ueberleben längster Verbindungen zurückführen. (Vergl. §. 224).

§. 267.

Soll die Ueberlebensrente um n Jahre *aufgeschoben* werden, so fallen die Renten für die ersten n Jahre weg, und die Zahlung fängt mit dem n + 1ten Jahre an. Wenn also wieder die Verbindung anfänglich, wie im §. 262, aus den Personen ABCDFGH bestände, und die aufgeschobene Ueberlebensrente für den Verein von ABCD gesucht würde, so wäre ihr Werth =

$$\int \frac{A^{\overline{n+1}} \,..\, D^{\overline{n+1}}}{A \,..\, D \;\; r_{n+1}} - \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{A^{\overline{n+1}} \,..\, D^{\overline{n+1}} F^{\overline{n+1}}}{A \,..\, D\, F \;\; r_{n+1}} \\ \int \frac{A^{\overline{n+1}} \,..\, D^{\overline{n+1}} G^{\overline{n+1}}}{A \,..\, D\, G \;\; r_{n+1}} \\ \int \frac{A^{\overline{n+1}} \,..\, D^{\overline{n+1}} H^{\overline{n+1}}}{A \,..\, D\, H \;\; r_{n+1}} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{A^{\overline{n+1}} \,..\, D^{\overline{n+1}} F^{\overline{n+1}} G^{\overline{n+1}}}{A \,..\, D\, F\, G \;\; r_{n+1}} \\ \int \frac{A^{\overline{n+1}} \,..\, D^{\overline{n+1}} F^{\overline{n+1}} H^{\overline{n+1}}}{A \,..\, D\, F\, H \;\; r_{n+1}} \\ \int \frac{A^{\overline{n+1}} \,..\, D^{\overline{n+1}} G^{\overline{n+1}} H^{\overline{n+1}}}{A \,..\, D\, G\, H \;\; r_{n+1}} \end{array} \right\} -$$

$$\int \frac{A^{\overline{n+1}} \,..\, D^{\overline{n+1}} F^{\overline{n+1}} G^{\overline{n+1}} H^{\overline{n+1}}}{A \,..\, D\, F\, G\, H \;\; r_{n+1}},$$

wo alle Summen mit dem Jahre $n + 1$ anfangen und bis zur Altersergänzung der ältsten Person in jedem Theile fortgehen. Man erhält also den Werth

$$= \frac{A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}}}{A \,..\, D \;\; r_n} \lambda\, \overline{(a+n) \,..\, (d+n)} -$$

$$\left[\frac{A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}} F^{\overline{n}}}{A \,..\, D\, F \;\; r_n} \lambda\, \overline{(a+n) \,..\, (d+n)\,(f+n)} + \right.$$

$$\frac{A^{\overline{n}} \,..\, D^{\overline{n}} G^{\overline{n}}}{A \,..\, D\, G \;\; r_n} \lambda\, \overline{(a+n) \,..\, (d+n)\,(g+n)} +$$

$$\frac{A^{\overline{n}}\,..\,D^{\overline{n}}\,H^{\overline{n}}}{A\,..\,D\,H\,r^{n}}\;\lambda\,\overline{(a+n)\,..\,(d+n)\,(h+n)}\,]\;+$$

$$[\;\frac{A^{\overline{n}}\,..\,D^{\overline{n}}\,F^{\overline{n}}\,G^{\overline{n}}}{A\,..\,D\,F\,G\,r^{n}}\;\lambda\,\overline{(a+n)\,..\,(d+n)\,(f+n)\,(g+n)}\;+$$

$$\frac{A^{\overline{n}}\,..\,D^{\overline{n}}\,F^{\overline{n}}\,H^{\overline{n}}}{A\,..\,D\,F\,H\,r^{n}}\;\lambda\,\overline{(a+n)\,..\,(d+n)\,(f+n)\,(h+n)}\;+$$

$$\frac{A^{\overline{n}}\,..\,D^{\overline{n}}\,G^{\overline{n}}\,H^{\overline{n}}}{A\,..\,D\,G\,H\,r^{n}}\;\lambda\,\overline{(a+n)\,..\,(d+n)\,(g+n)\,(h+n)}\,]\;-$$

$$\frac{A^{\overline{n}}\,..\,D^{\overline{n}}\,F^{\overline{n}}\,G^{\overline{n}}\,H^{\overline{n}}}{A\,..\,D\,F\,G\,H\,r^{n}}\;\lambda\,\overline{(a+n)\,..\,(d+n)\,(f+n)\,(g+n)\,(h+n)}.$$

Es wird hier also jede, in dem Ausdruck für die volle Ueberlebensrente enthaltene, Verbindungsrente um n Jahre aufgeschoben, und wenn man die Theile, welche gleichviel Dimensionen haben, zusammennimmt und die Summe der gleichnamigen aufgeschobenen Verbindungsrenten für die Verbindungen der vier Personen mit einer, zwey oder drey der andern mit $S.\overline{\lambda\,IV\,.\,I}^{\,'n+1}$, $S.\overline{\lambda\,IV\,.\,II}^{\,'n+1}$ und $S.\overline{\lambda\,IV.III}^{\,'n+1}$ bezeichnet, so ist die gedachte Ueberlebensrente $=$ $\overline{\lambda\,IV}^{\,'n+1} - S.\overline{\lambda\,IV\,.\,I}^{\,'n+1} + S.\overline{\lambda\,IV\,.\,II}^{\,'n+1} - \lambda\overline{IV.III}^{\,'n+1}$.

Da, wie man leicht übersieht, dieses nämliche Gesetz für jede collective Ueberlebensrente gilt, so kann man, wenn die anfängliche Verbindung aus m Personen besteht, und die aufgeschobene Ueber-

lebensrente für m — u = n Personen gesucht wird, die Formel dafür im Allgemeinen ausdrucken durch $\overline{\lambda\, N}^{'n\dagger 1} - S.\overline{\lambda\, N.I}^{'n\dagger 1} + S.\overline{\lambda\, N.II}^{'n\dagger 1} - .. + ... \mp \overline{\lambda\, M}^{'n\dagger 1}$, wo im Allgemeinen $S.\overline{\lambda\, N.X}^{'n\dagger 1}$ die Summe der aufgeschobenen Renten für die Verbindung der n überlebenden Personen *zusammengenommen* mit je x der zu überlebenden Personen bedeutet.

Man hat also hienach bey einer anfänglichen Verbindung unter A und B die um n Jahre aufgeschobene Ueberlebensrente für $A = \overline{\lambda\, a}^{'n\dagger 1} - \overline{\lambda\, ab}^{'n\dagger 1} = \frac{A^{n}}{A\ rn}\,\lambda\,\overline{(a\dagger n)} - \frac{A^{n}\,B^{n}}{A\ B\ rn} \times \lambda\,\overline{(a\dagger n)\,(b\dagger n)}$. (Vergl. §. 170).

Bey einer anfänglichen Verbindung von drey Personen ABC wird die um n aufgeschobene Ueberlebensrente für $A = \overline{\lambda\, a}^{'n\dagger 1} - S.\overline{\lambda\, a.I}^{'n\dagger 1} + \overline{\lambda\, a.II}^{'n\dagger 1} = \frac{A^{n}}{A\ rn}\,\lambda\overline{(a\dagger n)} - [\frac{A^{n}\,B^{n}}{A\ B\ rn} \times \lambda\,\overline{(a\dagger n)\,(b\dagger n)} + \frac{A^{n}\,C^{n}}{A\ C\ rn}\,\lambda\,\overline{(a\dagger n)\,(c\dagger n)}] + \frac{A^{n}\,B^{n}\,C^{n}}{A\ B\ C\ rn}\,\lambda\,\overline{(a\dagger n)\,(b\dagger n)\,(c\dagger n)}$, die um n Jahre aufgeschobene Ueberlebensrente für

das Paar AB aber $\overline{\lambda\, a\, b}^{\prime n+1} - \overline{\lambda\, a\, b\,.\, 1}^{\prime n+1} =$

$$\frac{A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}}{A\, B\, r^n}\, \overline{\lambda\, (a+n)\, (b+n)} - \frac{A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}\, C^{\underline{n}}}{A\, B\, C\, r^n} \times$$

$\overline{\lambda\, (a+n)\, (b+n)\, (c+n)}$ etc.

Es ergiebt sich übrigens von selbst, daſs wenn in irgend einem oder einigen Theilen n über die Altersergänzung irgend einer Person hinausgehen sollte, dieser Theil oder diese Theile $= 0$ werden, weil es dann nach der Sterbensordnung keine Personen dieses Alters, also auch keine Verbindung derselben mit andern, mehr giebt. Wäre z. B. $a = 60$, $b = 80$, und sollte die Ueberlebensrente von A um 20 Jahre aufgeschoben werden, so hätte man diese Ueberlebensrente $= \frac{A^{\underline{20}}}{A\, r^{20}}\, \lambda\, 80 - \frac{A^{\underline{20}}\, B^{\underline{20}}}{A\, B\, r^{20}}\, \overline{\lambda\, 80.100} = \frac{A^{\underline{20}}}{A\, r^{20}}\, \lambda\, 80$, weil der verneinte Theil $= 0$, indem $B^{\underline{20}} = 0$, und die aufgeschobene Ueberlebensrente lediglich als eine aufgeschobene Leibrente auf ein einziges Leben anzusehen ist. Wäre, bey einer anfänglichen Verbindung unter ABC, $a = 70$, $b = 80$ und $c = 90$, und sollte die Ueberlebensrente für A um 10 Jahre aufgeschoben werden, so hätte man den Werth derselben

$$= \frac{A^{\underline{10}}}{A\, r^{10}}\, \overline{\lambda\, 80} - \left(\frac{A^{\underline{10}}\, B^{\underline{10}}}{A\, B\, r^{10}}\, \overline{\lambda\, 80.90} + \frac{A^{\underline{10}}\, C^{\underline{10}}}{A\, C\, r^{10}}\, \overline{\lambda\, 80.100}\right) + \frac{A^{\underline{10}}\, B^{\underline{10}}\, C^{\underline{10}}}{A\, B\, C\, r^{10}} \times$$

$$\lambda\ \overline{80 \cdot 90 \cdot 100} = \frac{A^{1\odot}}{\overline{A\ r^{1\odot}}}\ \lambda\ 80 - \frac{A^{1\odot}\,B^{1\odot}}{\overline{A\ B\ r^{1\odot}}}\ \times$$

$\lambda\ \overline{80 \cdot 90}$, indem die übrigen Theile $= 0$ werden und die Ueberlebensrente hier nur als eine aufgeschobene Ueberlebensrente von A nach B anzusehen ist.

§. 268.

Soll die Ueberlebensrente mit dem nten Jahre *aufhören*, so wird in dem Werthe der vollen Ueberlebensrente der Werth der um n Jahre aufgeschobenen Ueberlebensrente abgezogen, welches keiner weitern Demonstration oder Erläuterung bedarf.

Sollte die Rente zugleich um n Jahre *aufgeschoben* seyn und nach n + m Jahren wieder *aufhören*, so müfste man den Werth der um n, imgleichen den Werth der um n + m Jahren aufgeschobenen Ueberlebensrente suchen, und von dem erstern den letztern abziehen, welches ebenfalls von selbst erhellet.

§. 269.

Wenn auch für das *disjunctive Ueberleben* die um n Jahre aufgeschobene Rente gesucht würde, so fielen ebenfalls wieder die Zahlungen der ersten n Jahre weg, und es bestände daher die aufgeschobene Ueberlebensrente wieder aus eben so viel und so vielnahmigen Verbindungsrenten als die volle dis-

junctive Ueberlebensrente, nur mit dem Unterschiede, dafs bey der aufgeschobenen jede Verbindungsrente um n Jahre aufgeschoben werden müfste. Uebrigens gilt auch hier, was vorher §. 267 von den Theilen angeführt ist, worin n über die Altersergänzung der ältesten Person hinausgeht, nämlich dafs diese Theile $= 0$ werden.

§. 270.

Falls die Ueberlebensrente erst im $n + 1$*ten Jahre nach dem gänzlichen Abgange der zu überlebenden Personen* anfangen sollte zu laufen, so fände man den Werth derselben folgendermaafsen. Gesetzt der überlebende Verein bestände aus drey Personen A, B, C und es wären die zu überlebenden Personen F und G, so wäre die Zahl der Verbindungen zu 5, von denen F und G ganz ausgestorben sind, A, B und C aber noch leben, im ersten Jahre $= A^{1} B^{1} C^{1} (F - F^{1}) (G - G^{1})$, und von diesen Vereinen bestehen am Ende des $n + 1$ten Jahrs noch $A^{\overline{n+1}} B^{\overline{n+1}} C^{\overline{n+1}} (F - F^{1}) (G - G^{1})$. Es ist also der gegenwärtige Werth der ersten Jahrszahlung, auf alle anfängliche Verbindungen vertheilt,

$$= \frac{A^{\overline{n+1}} B^{\overline{n+1}} C^{\overline{n+1}} (F - F^{1}) (G - G^{1})}{A\ B\ C\ F\ G\ r^{n+1}}.$$

Eben so ist der gegenwärtige Werth der zweiten Jahrszahlung $=$

$$\frac{A^{\overline{n+2}}\ B^{\overline{n+2}}\ C^{\overline{n+2}}\ (F - F^{2})\ (G - G^{2})}{A\ B\ C\ F\ G\ r^{n+2}}$$

etc. Hiernach wird also der Werth für alle Jahre

$$= \int \frac{A^{\overline{n+1}}\ B^{\overline{n+1}}\ C^{\overline{n+1}}}{A\ B\ C\ r^{n+1}} -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{A^{\overline{n+1}}\ B^{\overline{n+1}}\ C^{\overline{n+1}}\ F^{x}}{A\ B\ C\ F\ r^{n+1}} \\ \int \frac{A^{\overline{n+1}}\ B^{\overline{n+1}}\ C^{\overline{n+1}}\ G^{x}}{A\ B\ C\ G\ r^{n+1}} \end{array} \right\} +$$

$$\int \frac{A^{\overline{n+1}}\ B^{\overline{n+1}}\ C^{\overline{n+1}}\ F^{x}\ G^{x}}{A\ B\ C\ F\ G\ r^{n+1}} =$$

$$\frac{A^{\overline{n}}\ B^{\overline{n}}\ C^{\overline{n}}}{A\ B\ C\ r^{n}} [\lambda\ \overline{(a+n)\ (b+n)\ (c+n)} -$$

$$\lambda\ \overline{(a+n)\ (b+n)\ (c+n)}\,.\,f - \lambda\ \overline{(a+n)\ (b+n)\ (c+n)}\,.\,g$$

$$+ \lambda\ \overline{(a+n)\ (b+n)\ (c+n)}\,.\,f\,g],$$

wo das, was in den Klammern steht, die Ueberlebensrente dreier Personen vom Alter $\overline{a+n}$, $\overline{b+n}$ und $\overline{c+n}$ über die zwey andern Personen vom Alter f und g ist.

Auf dieselbe Weise erhält man überhaupt für einen bestimmten Verein von Personen die Ueberlebensrente, die n Jahre nach dem gänzlichen Abgange der zu überlebenden Personen anfangen soll zu laufen, wenn man die Ueberlebensrente für diese zusammenverbundenen überlebenden Personen, das Alter einer jeden um n Jahre vermehrt, über die zu überlebenden Personen, ihr Alter unverändert

beibehalten, mit dem Quotienten der Wahrscheinlichkeit, dafs die gegebene Verbindung der überlebenden Personen nach n Jahren noch bestehe, multiplicirt und mit r^n dividirt, wonach also z. B., wenn diese überlebenden Personen A B C D wären, dieser Factor, mit welchem die Ueberlebensrente multiplicirt werden mufs, $= \frac{A^n\ B^n\ C^n\ D^n}{A\ B\ C\ D\ r^n}$ ist.

§. 271.

Wenn dagegen festgesetzt würde, dafs die Ueberlebensrente für die drey verbundenen Personen A B C über die zwey andern F G nur *auf den Fall bezahlt werden sollte, dafs die sämtlichen fünf Personen noch am Ende des nten Jahrs zusammenlebten,* so wäre die derzeitige Ueberlebensrente für die erwähnten Personen, wenn sie vom n + 1ten Jahre anfangen sollte zu laufen, $=$

$\lambda\overline{(a\dagger n)\ (b\dagger n)\ (c\dagger n)} - [\lambda\overline{(a\dagger n)\ (b\dagger n)\ (c\dagger n)\ (f\dagger n)} + \lambda\overline{(a\dagger n)\ (b\dagger n)\ (c\dagger n)\ (g\dagger n)}] + \lambda\overline{(a\dagger n)\ (b\dagger n)\ (c\dagger n)\ (f\dagger n)\ (g\dagger n)}$, und dieser Ausdruck, mit r^n dividirt, giebt den gegenwärtigen Werth der nämlichen Ueberlebensrente. Da nun aber die Wahrscheinlichkeit, dafs die Verbindung unter den fünf Personen am Ende des nten Jahrs noch bestehe, $= \frac{A^n\ B^n\ C^n\ F^n\ G^n}{A\ B\ C\ F\ G}$ ist, so

wird der Werth der gesuchten Ueberlebensrente =

$$\frac{A^{n}B^{n}C^{n}F^{n}G^{n}}{A\,B\,C\,F\,G_{rn}}\,[\lambda\,\overline{(a\dagger n)\,(b\dagger n)\,(c\dagger n)} -$$

$$\lambda\,\overline{(a\dagger n)\,(b\dagger n)\,(c\dagger n)\,(f\dagger n)} -$$

$$\lambda\,\overline{(a\dagger n)\,(b\dagger n)\,(c\dagger n)\,(g\dagger n)} +$$

$$\lambda\,\overline{(a\dagger n)\,(b\dagger n)\,(c\dagger n)\,(f\dagger n)\,(g\dagger n)}\,].$$

Falls n die Altersergänzung irgend einer Person übersteigen sollte, so würde der Werth dieser Ueberlebensrente = 0, indem dann irgend ein Factor im Zähler von $\frac{A^{n}B^{n}C^{n}F^{n}G^{n}}{A\,B\,C\,F\,G}$ = 0 wird, und nach n Jahren überall keine unaufgelösete Verbindung unter den fünf Personen besteht.

Auch das hier angegebene Gesetz ist allgemein, und wenn die Ueberlebensrente für gewifse Personen zusammengenommen nach dem Tode der andern unter der Bedingung zahlbar, dafs alle noch n Jahre zusammenleben, gesucht wird, so mufs man die Ueberlebensrente für die überlebenden Personen über die andern, das Alter sowohl der überlebenden als der zu überlebenden um n Jahr vermehrt, mit der Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des nten Jahrs noch alle Personen zusammenleben, multipliciren und mit rn dividiren, so dafs also, wenn die anfängliche Verbindung aus den Personen A B C F G besteht,

dieser Factor, womit die Rente multiplicirt werden soll, $= \frac{A^{n}\ B^{n}\ C^{n}\ F^{n}\ G^{n}}{A\ B\ C\ F\ G\ r^{n}}$ wird.

Anm. Uebrigens ist hier durchgängig vorausgesetzt, dafs die Personen, für welche die Rente bestimmt ist, sie nur so lange geniefsen als sie zusammenleben. Wenn dagegen z. B. von mehreren Kindern jedes, so lange es lebt, eine Rente nach dem Tode der Eltern haben sollte, so wären dies so viel verschiedene Renten, und bey jeder käme nur das Alter des einen Pensionisten und der beiden Eltern in Betracht. Sollte aber für alle zusammen eine Ueberlebensrente gekauft werden, die nach dem Tode des einen oder einiger den übrigen zuwüchse, so wäre dies eine Ueberlebensrente für den Längstlebenden, wovon noch weiter unten gehandelt werden wird.

§. 272.

Wenn der Werth einer Ueberlebensrente nicht auf einmal durch Einschufs, sondern durch einen jährlichen Beitrag, wie es heifst *nach Contributionsfufs*, bezahlt werden soll, so kann man auf jeden Fall zuerst den baaren Werth der Ueberlebensrente berechnen. Ist dieser Werth, der V heifsen mag, gefunden, und soll derselbe durch einen jährlichen Beitrag, entweder während des Lebens einer einzigen Person oder des Zusammenlebens mehrerer Personen oder auch während des längsten Lebens unter denselben, bezahlt werden, ist ferner der baare Werth dieser Leibrente, Verbindungsrente oder Rente des Längstlebenden $=$ W, so hat man den jährlichen Beitrag für den Ankauf der Ueberlebens-

rente $I = \frac{V}{W}$. Wenn also die jährlich zu zahlende Ueberlebensrente $= P$ ist, so ist der dafür jährlich zu zahlende Beitrag $= \frac{V}{W} P$ (Vergleiche §. 175).

§. 273.

Wenn die Rente für das *zwiefache Ueberleben* unter drey Personen gesucht wird, und zuerst A die Rente genieſsen soll von der Zeit an, da C vor B stirbt, so ist, *nach der Hypothese* und auf augenblickliche Zahlungen gerechnet, der allgemeine Ausdruck für den Werth der Rente $=$

$$\int \frac{(\alpha - x)\, dx}{\alpha \quad rx} \cdot \frac{\int (\beta - x)\, dx}{\beta\, \gamma}.$$

Wenn nun 1) A nicht jünger ist als eine der andern Personen, so bedarf es nur einer einzigen Berechnung, und man hat $\frac{\int (\beta - x)\, dx}{\beta\, \gamma} =$ $\int \frac{dx}{\gamma} - \int \frac{x\, dx}{\beta\, \gamma} = \frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{\beta\gamma}$. Folglich wird $\int \frac{(\alpha - x)\, dx \int (\beta - x)\, dx}{\alpha \quad rx \quad \beta\, \gamma} =$

$$\int \frac{(\alpha - x)}{\alpha} \left(\frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\beta\gamma}\right) \frac{dx}{rx} =$$

$$\int \frac{(\alpha - x)\, x\, dx}{\alpha \quad \gamma \quad rx} - \int \frac{(\alpha - x)\, x^2\, dx}{2 \quad \alpha\, \beta\, \gamma \quad rx}.$$

Der erste Ausdruck ist eine Ueberlebensrente für A

nach dem Tode von C, der zweite die Hälfte der Ueberlebensrente für A nach dem Tode beider Personen B C. Also ist für diesen Fall der Werth $=$ $\lambda a - \lambda \overline{a\,c} - \frac{1}{2}(\lambda a - \lambda \overline{a\,b} - \lambda \overline{a\,c} + \lambda \overline{a\,b\,c})$ $= \frac{1}{2}(\lambda a + \lambda \overline{a\,b} - \lambda \overline{a\,c} - \lambda \overline{a\,b\,c})$. Sind b und c gleich, so wird der angeführte Werth $=$ $\frac{1}{2}(\lambda a - \lambda \overline{a\,b\,c})$, wie von selbst erhellet.

2) Ist A die jüngste Person, B aber älter als C, so ist für die Zeit β, $\int \frac{(\alpha - x)\,x\,dx}{\alpha\ \gamma\ rx} -$ $\int \frac{(\alpha - x)\,x^2\,dx}{2\ \alpha\,\beta\,\gamma\ rx} = \frac{1}{2}(\lambda \overline{a}^{\beta} - \lambda \overline{a\,c}^{\beta}$ $+ \lambda \overline{a\,b} - \lambda \overline{a\,b\,c})$, wo alle Renten nur bis zum Ablauf der Zeit β fortwähren. Bey dem Ablauf dieser Zeit ist, $x = \beta$ gesetzt, $\frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\,\beta\gamma} = \frac{\beta}{2\gamma}$, und die Anzahl der lebenden A $= \alpha - \beta$. Folglich wird der Werth der Rente für diese Zeit $=$ $\frac{\beta}{2\,\gamma\ r^{\beta}} \int \frac{(\alpha - \beta - x)\,dx}{\alpha\ \ rx}$. Die zu integrirende Gröfse ist nach der Hypothese gleich einer um β Jahre aufgeschobenen Leibrente für A, und dieser Theil ist also $= \frac{\beta \quad (\alpha - \beta) \quad \lambda\,(a + \beta)}{2\ \gamma \quad \alpha \quad\quad r\beta}$.

3) Ist wieder A die jüngste Person, C aber älter als B, so ist für die Zeit γ,

$$\int \frac{(\alpha - x)\,x\,dx}{\alpha\ \ \gamma\ \ rx} - \int \frac{(\alpha - x)\,x^2\,dx}{2\ \ \alpha\,\beta\,\gamma\ \ rx} =$$

$\frac{1}{2}\,(\lambda\,\overbrace{a}^{\gamma,} + \lambda\,\overbrace{ab}^{\gamma,} - \lambda\,\overline{ac} - \lambda\,\overline{abc})$, wo alle Renten bis zu Ende der Zeit γ währen. Bey Ablauf dieser Zeit ist $\frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\beta\gamma} = 1 - \frac{\gamma}{2\beta}$, und die Zahl der lebenden $A = \alpha - \gamma$. Folglich hat man den Werth der Rente für diese Zeit $=$

$$\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \int \frac{(\alpha - \gamma - x)\,dx}{\alpha\; r^{\gamma + x}}$$

$$= \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \frac{\alpha - \gamma}{\alpha} \cdot \frac{\lambda\,(\alpha + \gamma)}{r\gamma}.$$

§. 274.

Würde *nach irgend einer andern Sterbensordnung* der Werth der gedachten Rente gesucht, nämlich für A von der Zeit an, da C vor B abgeht, so wäre, auf ganze Jahre gerechnet, ihr Werth $=$

$$\int \frac{\overline{A^{x}\; \int B^{x}\; \Delta C^{x-1}}}{r^x\; A\,B\,C},$$

wo x die Altersergänzung von A ist und dasjenige beobachtet werden mufs, was im §. 225 angeführt worden, wenn x gröfser als eine oder beide übrige Altersergänzungen ist.

Nun ist $\int \frac{\overline{A^{x}\; \int B^{x}\; \Delta C^{x-1}}}{r^x\; A\,B\,C} = \frac{1}{A\,B\,C} \times$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{A^{1}}{r}\ B^{1}\ \Delta\ C^{0} \\ \frac{A^{2}}{r^{2}}\ (B^{1}\ \Delta\ C^{0} + B^{2}\ \Delta\ C^{1}) \\ \frac{A^{3}}{r^{3}}\ (B^{1}\ \Delta C + B^{2}\ \Delta C^{1} + B^{3}\ \Delta C^{2}) \\ \quad + \ \ldots \\ \frac{A^{\overline{x}}}{r^{x}}\ (B^{1}\ \Delta C + B^{2}\ \Delta C^{1} + B^{3}\ \Delta C^{2} + \ldots) \end{array}\right\};$$

folglich hat man, wenn y die kleinste Altersergänzung von B oder C ist, den gesuchten Werth =

$$\frac{1}{A\,B\,C}\ (B^{1}\ \Delta\ C \int \frac{A'^{1}}{r^{1}} + B^{2}\ \Delta\ C^{1} \int \frac{A'^{2}}{r^{2}}$$

$$+ B^{3}\ \Delta\ C^{2} \int \frac{A'^{3}}{r^{3}} + \ldots + B^{\overline{y}}\ \Delta C^{\overline{y-1}} \int \frac{A^{\overline{'y}}}{r^{y}}),$$

wo die Summen der discontirten Zahlen der Lebenden von A mit dem bezeichneten Gliede anfangen und bis zur Altersergänzung von A fortgehen. (Wäre x kleiner als y, so wäre begreiflich das letzte Glied in der obigen Reihe =

$$B^{\overline{x}}\ \Delta\ C^{\overline{x-1}} \int \frac{A^{\overline{'x}}}{r^{x}}\ ).$$ Man kann daher den obigen Werth auch ausdrucken durch

$$\frac{1}{B\,C}\ (B^{1}\ \Delta\ C\ \lambda a + B^{2}\ \Delta\ C^{1}\ \overline{\lambda a}^{\overline{'2}} +$$

$$B^{3}\ \Delta C^{2}\ \overline{\lambda a}^{\overline{'3}} + \ldots).$$

Aufserdem kann man, wenn $x > y$,

$$\int \frac{A^{\overline{x}} \overline{\int B^{\overline{x}} \triangle C^{\overline{x-1}}}}{rx \; A \; B \; C}$$ in zwey Theile zerlegen. Der Werth ist nämlich bis zum Ablauf der Zeit $y = \int \frac{A^{\overline{y}} \overline{\int B^{\overline{y}} \triangle C^{\overline{y-1}}}}{ry \; A \; B \; C}$. Von dieser Zeit an kömmt noch hinzu die Lebensrente für A, so weit sie bis dahin die vor B verstorbenen C überlebt haben. Da nun der jetzige Werth dieser Rente, von Ablauf der Zeit y gerechnet, $=$ $\frac{A^{\overline{y}}}{A} \frac{\lambda \overline{a \dagger y}}{ry}$, und die Wahrscheinlichkeit dafs bis dahin B überlebt habe C, $=$ $\frac{\overline{\int B^{\overline{y}} \triangle C^{\overline{y-1}}}}{B \; C}$ ist, so hat man die gesuchte Lebensrente für diese Zeit $=$

$$\frac{\overline{\int B^{\overline{y}} \triangle C^{\overline{y-1}}}}{B \; C} \cdot \frac{A^{\overline{y}}}{A} \frac{\lambda \overline{a \dagger y}}{ry}.$$ Sollte B vor C sterben, so wäre die gesammte Ueberlebensrente für $A = \int \frac{A^{\overline{y}} \overline{\int C^{\overline{y}} \triangle B^{\overline{y-1}}}}{ry \; A \; B \; C} +$

$$\frac{\overline{\int C^{\overline{y}} \triangle B^{\overline{y-1}}}}{B \; C} \frac{A^{\overline{y}}}{A} \frac{\lambda \overline{a \dagger y}}{ry}.$$

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dafs bis ans Ende des nten Jahrs B überlebt habe C, mit $\psi^{\overline{n}|}$, so kann man die gesuchte Ueberlebensrente für A, wenn C zuerst gestorben seyn soll, durch

$$\int \frac{\psi^{\overline{n}|}\, A^{\overline{n}|}}{r^n\, A}$$ ausdrucken.

§. 274. b.

Verlangte man den vollständigen Werth dieser Rente, so wäre dieser auf den Fall, da C vor B stirbt, in Uebereinstimmung mit §. 227. b, =

$$\int \frac{A^{\overline{n-1}|}\, \overline{\int B^{\overline{n}|}\, \Delta\, C^{\overline{n-1}|}}}{r^n\, A\, B\, C} +$$

$$\tfrac{1}{2} \int \frac{A^{\overline{n-1}|}\, \overline{\int \Delta B^{\overline{n-1}|}\, \Delta\, C^{\overline{n-1}|}}}{r^n\, A\, B\, C} -$$

$$\tfrac{1}{6} \int \frac{\Delta A^{\overline{n-1}|}\, B^{\overline{n}|}\, \Delta\, C^{\overline{n-1}|}}{r^n\, A\, B\, C} -$$

$$\tfrac{1}{3} \int \frac{\Delta A^{\overline{n-1}|}\, \Delta B^{\overline{n-1}|}\, \Delta\, C^{\overline{n-1}|}}{r^n\, A\, B\, C}.$$ Die beiden ersten Theile sind $= \int \frac{\psi^{\overline{n}|}\, A^{\overline{n}|}}{r^n\, A}$,

wenn man nämlich unter $\psi^{\overline{n}|}$ die *vollständige* Wahrscheinlichkeit versteht, das am Ende des nten

Jahrs B überlebt habe C. Der dritte Theil ist $= -$

$$\frac{5}{6}\left[\frac{A^{\overline{-1}}\ C^{\overline{-1}}}{A\ C}\ \lambda\ \overline{(a-1)\ b\ (c-1)}\ -\right.$$

$$\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\ \lambda\ \overline{(a-1)\ b\ c}\ -\ \frac{C^{\overline{-1}}}{C}\ \lambda\ \overline{a\ b\ (c-1)}\ +$$

$$\left.\lambda\ \overline{abc}\right];$$

der letzte Theil der Correction kann wohl als unbeträchtlich wegfallen.

§. 275.

Wenn ferner die Rente für A gesucht wird, zahlbar von der Zeit an, da B nach C verstorben und zuerst *nach der Hypothese* gerechnet werden, soll, so ist der allgemeine Ausdruck dafür

$$\int \frac{(\alpha - x) \int x\,dx}{\alpha\ \beta\ \gamma} \cdot \frac{dx}{rx}.$$

Da nun $\int \frac{x\,dx}{\beta\ \gamma} = \frac{x^2}{2\ \beta\ \gamma}$, so wird

$$\int \frac{(\alpha - x) \int x\,dx}{\alpha\ \beta\ \gamma} \cdot \frac{dx}{rx} = \int \frac{(\alpha - x)\ x^2\,dx}{2\ \alpha\ \beta\ \gamma\ rx}.$$

Wenn also 1) α nicht gröfser ist als die andern Altersergänzungen, so ist $\int \frac{(\alpha - x)\ x^2\,dx}{2\ \alpha\ \beta\ \gamma\ rx}$ gleich der Hälfte der Rente auf das Ueberleben von A über beide Personen B und C, d. h. $= \frac{1}{2}$ ($\lambda\ a - \lambda\ \overline{ab} - \lambda\ \overline{ac} + \lambda\ \overline{abc}$), (§. 273) und dieser Werth gilt, es mag von den beiden Personen B und C die ältere oder die jüngere zuerst sterben.

Ist 2) A die jüngste Person, und soll von den beiden andern zuerst die jüngere B und dann die ältere C gestorben seyn, so ist für die Zeit γ $\int \frac{(\alpha - x)\, x^2\, dx}{2\, \alpha \beta \gamma\, rx}$ gleich der Hälfte der Rente auf das Ueberlebens von A über beide Personen zusammengenommen während der kleinsten Altersergänzung γ, d. h. $= \frac{1}{2} (\overline{\lambda a}^{\gamma} - \overline{\lambda ab}^{\gamma} - \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{abc})$. Nach Ablauf der Zeit γ ist, da nun in $\int \frac{x\, dx}{\beta\gamma}$ x, als auf γ bezogen, nicht mehr zunehmen kann, $\int \frac{x\, dx}{\beta\, \gamma} = \frac{x^2}{\beta\, \gamma} = \frac{\gamma}{2\, \beta}$; ferner ist bey Ablauf der Zeit γ die Anzahl und Altersergänzung der Personen $A = \alpha - \gamma$ oder der Kürze wegen $= \varepsilon$. Es wird also der derzeitige Werth der Ueberlebensrente für A, auf die Periode von Ablauf der Zeit γ bis zu Ende der Zeit α, $= \frac{\gamma}{2\beta} \int \frac{(\varepsilon - x)}{\alpha} \frac{dx}{rx}$, und der gegenwärtige Werth davon $= \frac{\gamma}{2\, \beta\, r^{\gamma}} \int \frac{(\varepsilon - x)}{\alpha} \frac{dx}{rx}$

$$= \frac{\gamma}{2\beta} \frac{\varepsilon}{\alpha\, r^{\gamma}} \int \frac{(\varepsilon - x)\, dx}{\varepsilon\, rx} = \frac{\gamma}{2\beta} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \frac{\lambda\, (\alpha + \gamma)}{r^{\gamma}},$$

wo $\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \frac{\lambda\, (\alpha + \gamma)}{r^{\gamma}}$ die um die Zeit γ aufgeschobene Leibrente für A ist. Folglich wird die

gesammte Ueberlebensrente für A nach dem Tode der zuletzt verstorbenen ältern Person C =

$$\tfrac{1}{2}\,(\overbrace{\lambda a}^{\gamma,} - \overbrace{\lambda ab}^{\gamma,} - \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{abc}) + \frac{\gamma}{2\beta}\cdot\frac{\alpha-\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\lambda\,(a\dagger\gamma)}{r^{\gamma}}.$$

Ist 3) wieder A die jüngste Person und wird die Ueberlebensrente für dieselbe gesucht, wenn von den beiden andern zuerst die ältere C und dann die jüngere B verstorben, so kann man am bequemsten den eben gefundenen Werth von der Rente auf das Ueberleben von A nach dem Abgange beider Personen abziehen. Da nun diese letzte Ueberlebensrente $= \lambda a - \lambda\,\overline{ab} - \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{abc}$, so hat man den gesuchten Werth $= \lambda a - \lambda\,\overline{ab} - \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{abc} - \tfrac{1}{2}\,(\overbrace{\lambda a}^{\gamma,} - \overbrace{\lambda ab}^{\gamma,} - \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{abc}) - \frac{\gamma}{2\beta}\cdot\frac{\alpha-\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\lambda\,(\alpha\dagger\gamma)}{r^{\gamma}} = \lambda a - \lambda\,\overline{ab} - \tfrac{1}{2}\,(\overbrace{\lambda a}^{\gamma,} - \overbrace{\lambda ab}^{\gamma,} + \lambda\,\overline{ac} - \lambda\,\overline{abc}) - \frac{\gamma}{2\beta}\cdot\frac{\alpha-\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\lambda\,(\alpha\dagger\gamma)}{r^{\gamma}}.$

§. 276.

Nach jeder Sterbensordnung ohne Unterschied ist, auf ganze Jahre gerechnet, bis zum Ablauf des nten Jahrs, die Ueberlebensrente für A nach dem

Tode derer B, welche ihre zugehörigen C überlebt haben, $= \int \frac{A^{\overline{n}} \int \Delta B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})}{r^n \; A \; B \; C}$,

so wie nach dem Tode derer C, welche ihre zugehörigen B überlebt haben, $=$

$\int \frac{A^{\overline{n}} \int \Delta C^{\overline{n-1}} (B - B^{\overline{n}})}{r^n \; A \; B \; C}$. Hier hat man nun in dem letzten Ausdruck, wenn die kleinste Altersergänzung $= y$ ist, die Rente bis zu Ablauf der Zeit $y = \int \frac{A^{\overline{y}} \int \Delta C^{\overline{y-1}} (B - B^{\overline{y}})}{r^y \; A \; B \; C}$.

Ist x die Altersergänzung für A und $x > y$, auch C die älteste Person, so kömmt nach Ablauf der Zeit y zu der bis dahin berechneten Ueberlebensrente nach dem Tode von C, noch hinzu die Rente für diejenigen A, welche die nach B verstorbenen C überlebt haben, und zwar vom Ablauf der Zeit y an bis zur Altersergänzung von A. Da nun der Qnotient $\frac{\int \Delta C^{\overline{y-1}} (B - B^{\overline{y}})}{B \; C}$

die Wahrscheinlichkeit ausdruckt, dafs bis zu Ende des yten Jahrs C gestorben sey nach B, so ist der gesuchte zweite Theil der Ueberlebensrente für A

$= \frac{\int \Delta C^{\overline{y-1}} (B - B^{\overline{y}})}{B \; C} \left[\frac{A^{\overline{y+1}}}{A \, r^{y+1}} + \right.$

$$\frac{A^{\overline{y+2}}}{A^{\overline{ry+2}}} + \ldots] = \frac{\int \triangle C^{\overline{y-1}} (B - B^{\overline{y}})}{B\ C} \times$$

$$\frac{A^{\overline{y}}}{A^{\overline{ry}}} \lambda\, a + y.$$ Folglich wird die ganze Ueberlebensrente für A nach dem Tode von C =

$$\int \frac{A^{\overline{y}} \int \triangle C^{\overline{y-1}} (B - B^{\overline{y}})}{ry\ A\ B\ C} +$$

$$\frac{\int \triangle C^{\overline{y-1}} (B - B^{\overline{y}})}{B\ C} \cdot \frac{A^{\overline{y}}}{A^{\overline{ry}}} \lambda\, a + y.$$

Die Rente für A nach dem Tode derer B, die ihre zugehörigen C überlebt haben, wird also =

$$\lambda a - \lambda\, a\, b - \lambda\, a\, c + \lambda\, a\, b\, c -$$

$$\int \frac{A^{\overline{y}} \int \triangle C^{\overline{y-1}} (B - B^{\overline{y}})}{ry\ A\ B\ C} -$$

$$\frac{\int \triangle C^{\overline{y-1}} (B - B^{\overline{y}})}{B\ C} \cdot \frac{A^{\overline{y}}}{A^{\overline{ry}}} \lambda\, a + y.$$

Will man aber diese Rente unmittelbar berechnen, so hat man sie, in Uebereinstimmung mit §. 229,

$$= \int \frac{A^{\overline{y}} \int \triangle B^{\overline{y-1}} (C - C^{\overline{y}})}{ry\ A\ B\ C} +$$

$$\frac{\int \triangle B^{\overline{y-1}} (C - C^{\overline{y}})}{B\ C} \cdot \frac{A^{\overline{y}}}{A^{\overline{ry}}} \lambda\, a + y +$$

$$\frac{A^{\underline{y}}\ B^{\underline{y}}}{A\ B\ ry}\ (\lambda\ \overline{a + y} - \lambda\ \overline{(a + y)\ (b + y)}\ ].$$

Sonst kann auch noch, nach Anleitung deſselben §., diese Rente für A, wenn sie nach dem Tode von C bezahlt werden soll, durch $\lambda\, a - \lambda\, \overline{a\, c} - \frac{1}{B\, C}\ (\triangle\, C.B^{\underline{1}}\ \lambda\, a + \triangle\, C^{\underline{1}}.B^{\underline{2}}\ \overline{\lambda\, a}^{\underline{'2}} + \ldots + \triangle\, C^{\underline{y-1}}.B^{\underline{y}}\ \overline{\lambda\, a}^{\underline{'y}})$, wenn sie aber nach dem Tode von B bezahlt werden soll, durch $\lambda a - \lambda\, \overline{ab} - \frac{1}{B\, C}\ (\triangle\, B.C^{\underline{1}}\ \lambda\, a + \triangle\, B^{\underline{1}}.C^{\underline{2}}\ \overline{\lambda\, a}^{\underline{'2}} + \ldots + \triangle\, B^{\underline{y-1}}.C^{\underline{y}}\ \overline{\lambda\, a}^{\underline{'y}})$ ausgedruckt werden, wo y die kleinste Altersergäuzung unter den drey Personen ist.

Anm. Die Rechnung nach der letzten Formel, wobey man, auſser den Producten der Decremente von B in die Zahlen der lebenden C oder umgekehrt, die aufgeschobenen Leibrenten für A auf alle Jahre suchen soll, ist ziemlich weitläufig und kann leicht zu Irrungen Anlaſs geben. Kürzer und sicherer scheint es, auf die Weise, die in den §. §. 135 und 225 etc. angegeben ist, die Wahrscheinlichkeit, daſs B stirbt nach C, oder C stirbt nach B, für alle Jahre bis zur Altersergänzung der ältsten Person, hier C, zu suchen. Wenn diese letzte Wahrscheinlichkeit für irgend ein ntes Jahr $\chi^{\underline{n}}$ genannt wird, so hat man den Werth der Zahlung für dieses Jahr $= \chi^{\underline{n}}.\frac{A^{\underline{n}}}{A\ rn}$. Anstatt $\frac{A^{\underline{n}}}{rn}$ kann man die discontir-

ten Zahlen der Lebenden, hier $\frac{A^{\overline{n}}}{ra\dagger n}$, nehmen, und diese mit $\chi^{\overline{n}}$ multipliciren. Hat man auf diese Weise die Zahlungen aller Jahre bis zur Altersergänzung γ berechnet und addirt, so dividirt man durch die discontirte Lebenszahl für A, d. h. durch $\frac{A}{ra}$, wodurch man also $\int \frac{\chi^{\overline{\gamma}} A^{\overline{\gamma}}}{r^{\gamma} A}$ erhält. Für die übrige Zeit multiplicirt man die um γ Jahre aufgeschobene Leibrente für A mit $\chi^{\overline{\gamma}}$, woraus sich das Stück $\chi^{\overline{\gamma}} \cdot \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A r^{\gamma}} \lambda a \dagger \gamma$ ergiebt. Beide Theile zusammen geben die gesammte Ueberlebensrente für A über die nach B verstorbenen C. Will man den Werth dieser Rente haben, für den Fall wenn B nach C gestorben ist, so zieht man den vorher erhaltenen Werth von der Ueberlebensrente für A nach dem Tode beider Personen ab.

§. 276. b.

Sollte bey dieser Rente eine Correction angebracht werden, so ist der vollständige Werth, in Uebereinstimmung mit §. 229 b, =

$$\int \frac{A^{\overline{n-1}} \int \triangle B^{\overline{n-1}} (C - C^{\overline{n}})}{rn\ A\ B\ C} -$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{A^{\overline{n-1}} \int \triangle B^{\overline{n-1}} \triangle C^{\overline{n-1}}}{rn\ A\ B\ C} -$$

$$\frac{5}{6}\int \frac{\Delta A^{\overline{n-1}}\ \Delta B^{\overline{n-1}}\ (C - C^{\overline{n}})}{r^n\ A\ B\ C} -$$

$$\frac{2}{6}\int \frac{\Delta A^{\overline{n-1}}\ \Delta B^{\overline{n-1}}\ \Delta C^{\overline{n-1}}}{r^n\ A\ B\ C}.$$ Die beiden Producte, worin $\frac{\int A^{\overline{n-1}}}{r^n A}$ multiplicirt ist, zusammengenommen drucken die vollständige Wahrscheinlichkeit aus, dafs B am Ende des nten Jahrs nach C gestorben; wenn man also bey Berechnung der Rente diese vollständige Wahrscheinlichkeit gebraucht, so erhält man den ersten Theil der Correction, nämlich $-\frac{1}{2}\int \frac{A^{\overline{n-1}}/.\Delta B^{\overline{n-1}}\Delta C^{\overline{n-1}}}{r^n\ A\ B\ C}$, sofort mit. Der folgende Theil der Correction, nämlich $-\frac{5}{6}\int -\frac{\Delta A^{\overline{n-1}}\ \Delta B^{\overline{n-1}}\ (C - C^{\overline{n}})}{r^n\ A\ B\ C}$

ist $= -\frac{5}{6}\left[-\frac{1}{r} + \frac{r+1}{r}\lambda\,\overline{ab} - \frac{A^{\overline{-1}}}{A} \times \right.$

$\lambda\,\overline{(a-1)}\,b - \frac{B^{\overline{-1}}}{B}\lambda a\,\overline{(b-1)} -$

$\frac{A^{\overline{-1}}\ B^{\overline{-1}}}{A\ B}\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} +$

$\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\lambda\,\overline{(a-1)\,bc} + \frac{B^{\overline{-1}}}{B}\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,c} -$

$\lambda^{\overline{abc}}$]; der letzte Theil der Correction kann wohl als unbeträchtlich weggelafsen werden.

Anm. 1. Wenn der zuerst überlebenden Personen zwey oder drey wären, d. h. wenn A die Rente genieſsen sollte von der Zeit an, da die letzte der beiden Personen B und C oder der drey Personen B, C und D, und zwar nach dem Tode von F, verstorben ist, so wäre der Werth für den ersten Fall =

$$\int \frac{A^{\overline{n}}}{r^n A} \int \left[\frac{\Delta B^{\overline{n-1}}}{B} + \frac{\Delta C^{\overline{n-1}}}{C} - \frac{\Delta (B^{\overline{n-1}} C^{\overline{n-1}})}{BC} \right] \frac{F - F^{\overline{n}}}{F},$$

im zweiten Falle =

$$\int \frac{A^{\overline{n}}}{r^n A} \int \left[\frac{\Delta B^{\overline{n-1}}}{B} + \frac{\Delta C^{\overline{n-1}}}{C} + \frac{\Delta D^{\overline{n-1}}}{D} - \frac{\Delta (B^{\overline{n-1}} C^{\overline{n-1}})}{BC} - \frac{\Delta (B^{\overline{n-1}} D^{\overline{n-1}})}{BD} - \frac{\Delta (C^{\overline{n-1}} D^{\overline{n-1}})}{CD} + \frac{\Delta (B^{\overline{n-1}} C^{\overline{n-1}} D^{\overline{n-1}})}{BCD} \right] \frac{F - F^{\overline{n}}}{F}.$$

Im ersten Falle müfste man also für alle Jahre die Wahrscheinlichkeit suchen, dafs das Paar BC nach dem Tode von F ausgestorben, im zweiten Falle, dafs die Conternation BCD nach dem Abgange von F ausgestorben, und mit der Wahrscheinlichkeit für jedes Jahr müfste man das zugehörige Product $\frac{A^{\overline{n}}}{r^n A}$ multipliciren, welche Rechnung begreiflich noch weitläufiger würde als die schon angeführte.

Wollte man mit den Aufgaben dieser Art noch weiter gehen und z. B. die Rente suchen, die an A bezahlt werden sollte, von dem Tode des B an, wenn vorher zuerst D und dann C gestorben wäre, welche Rente durch

$$\int \frac{A^{x} \int \Delta B^{x-1} \int \Delta C^{x-1} (D - D^{x})}{rx\ A\ B\ C\ D}$$

ausgedruckt werden könnte, so erforderte die Berechnung eine dreifache Summirung, die Rente könnte durch drey Dimensionen von Ueberleben und Leibrenten ausgedruckt und eine *Ueberlebensrente des dritten Grades* genannt werden. Formeln liefsen sich für eine solche Berechnung allenfalls aufstellen; indefsen würde hier, wie es mehrmals in der angewandten Mathematik der Fall ist, der Gebrauch der Formeln, wegen der Schwierigkeiten der Berechnung, kaum thunlich seyn.

Da übrigens nicht einmal für das einfache Ueberleben vollständige, d. h. für jedes Jahr jedes Zusammenlebens eingerichtete, Tabellen vorhanden sind, auch die Ausarbeitung derselben wohl nicht zu erwarten ist, so mufs man bey Versorgungsanstalten die Natur dieser zwiefachen Ueberlebensrenten gründlich kennen, wenn bey denselben dergleichen Renten angenommen werden sollen.

Anm. 2. Bey andern Schriftstellern findet man andre Anweisungen zu Auflösung der in den §. §. 273 bis 276 vorgetragenen Aufgaben. *Tetens* hat keine bestimmte Vorschrift dafür gegeben, sondern dabey nur auf frühere Sätze seines Werkes verwiesen, die darauf nicht recht anwendbar sind. Herr *Brune* hat für den letzten im §. 276 abgehandelten Fall eine Regel gegeben, den Fall des §. 274 aber gar nicht berührt. Für den im §. 276 angegebenen Fall setzt er den Werth der Rente für A, und zwar bis zu Ablauf der vollen Altersergänzung, wenn die jüngere Person B nach der ältern C sterben soll, $= (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\ (\lambda a - \lambda \overline{ab} - \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{abc})$, wenn aber die ältere Person nach der jüngern sterben soll, $= \frac{\gamma}{2\beta}\ (\lambda a - \lambda \overline{ab} - \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{abc})$, wo β u. γ

die Altersergänzungen von B und C sind. Herr *Morgan* setzt die Rente für A sowohl nach dem Tode der jüngern Person B, die nach der ältern C verstorben, als nach dem Tode der ältern Person, die nach der jüngern gestorben, *bis zum Ablauf der Zeit* $\gamma = \int \frac{A^{\overline{\gamma}} (B - B^{\overline{\gamma}}) (C - C^{\overline{\gamma}})}{r^{\gamma} \, 2 \, A \, B \, C}$, d. h. gleich der halben Ueberlebensrente von A nach dem Tode von B und C zusammengenommen, während der Zeit γ; den übrigen Theil der Rente aber nimmt er für das Ueberleben über die ältere Person C $= \chi^{\overline{\gamma}} \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A \, r^{\gamma}} \lambda \overline{a \dagger \gamma}$, d. h. gleich der um γ Jahre aufgeschobenen Leibrente für A, multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, dafs bis zum Ablauf der Zeit γ C gestorben sey nach B. Wenn die jüngere Person B nach C sterben soll, so zieht Morgan den eben gedachten Werth ab von $\lambda a - \lambda \overline{ab} - \lambda \overline{ac} \dagger \lambda \overline{abc}$. Dafs nach den empirischen Sterbensordnungen, wenn B und C von verschiedenem Alter sind, die Wahrscheinlichkeit, dafs B gestorben nach C, und dafs C gestorben nach B, nicht als gleich betrachtet werden können, habe ich schon vorhin angeführt. Die Rente für A nach Ablauf der kleinsten Altersergänzung ist bey Morgan richtig angegeben.

Zur Vergleichung füge ich hier nur noch folgendes Beispiel hinzu. Wenn A 40, B 50 und C 70 Jahre alt sind, so ist nach Süfsmilchs Tabelle und dem Zinsfufse von 4 Procent, *bis zum Ablauf der kleinsten Altersergänzung* γ

$$\int \frac{A^{\overline{\gamma}} \int \Delta B^{\overline{\gamma - 1}} (C - C^{\overline{\gamma}})}{r^{\gamma} \; A \, B \, C} =$$

$$1{,}7819,\ \int \frac{A^{\frac{\gamma}{-}}\ \int \triangle C^{\frac{\gamma-1}{---}}\ (B - B^{\frac{\gamma}{-}})}{r^{\gamma}\quad A\ B\ C}$$

$$= 1{,}1788 \text{ und } \int \frac{A^{\frac{\gamma}{-}}\ \int \triangle B^{\frac{\gamma-1}{---}}\ \triangle C^{\frac{\gamma\ 1}{-}}}{r^{\gamma}\quad A\,B\,C}$$

$$= 0{,}2078. \text{ Ferner ist } \int \frac{\triangle A^{\frac{\gamma-1}{---}}.\int \triangle B^{\frac{\gamma-1}{---}}\ (C - C^{\frac{\gamma}{-}})}{r^{\gamma}\quad A\,B\,C}$$

$$- 0{,}0716,\ \int \frac{\triangle A^{\frac{\gamma-1}{---}}\ \int \triangle C^{\frac{\gamma-1}{---}}\ (B - B^{\frac{\gamma}{-}})}{r^{\gamma}\quad A\ B\ C}$$

$$= 0{,}0444, \int \frac{\triangle A^{\frac{\gamma-1}{---}}\ \int \triangle B^{\frac{\gamma-1}{---}}\ \triangle C^{\frac{\gamma-1}{---}}}{r^{\gamma}\quad A\ B\ C}$$

$$= 0{,}00706, \int \frac{\triangle A^{\frac{\gamma-1}{---}}\ \triangle B^{\frac{\gamma-1}{---}}\ (C - C^{\frac{\gamma}{-}})}{r^{\gamma}\quad A\ B\ C}$$

$$= 0{,}00714, \int \frac{\triangle A^{\frac{\gamma-1}{---}}\ \triangle C^{\frac{\gamma-1}{---}}\ (B - B^{\frac{\gamma}{-}})}{r^{\gamma}\quad A\ B\ C}$$

$$= 0{,}0036, \text{ und } \int \frac{\triangle A^{\frac{\gamma-1}{---}}\ \triangle B^{\frac{\gamma-1}{---}}\ \triangle C^{\frac{\gamma-1}{---}}}{r^{\gamma}\quad A\,B\,C}$$

$= 0{,}00046$. Folglich wird für die gedachte Zeit die vollständige Rente für A nach dem Tode von B, wenn C vorher gestorben $= 1{,}7400$ und nach dem Tode von C, wenn B vorher gestorben $= 1{,}1126$, und beide Werthe zusammen sind $= 2{,}8526$. Nach Brunes Annahme wäre der Werth nach dem Tode von B $=$

$(1 - \frac{26}{2.46})$ 2,8526 = 2,0464, nach dem Tode von C aber = $\frac{26}{92}$ 2,826 = 0,8062. Morgan würde jeden Werth = 1,4263 setzen. Wenn man auch den übrigen Theil der Rente für A, nämlich nach der kleinsten Altersergänzung, hinzufügt, so könnte der Fehler bey Brunes Methode noch beträchtlicher werden, da auch das übrige Stück nach der nämlichen Regel berechnet wird. Nach Morgans Methode kann der Fehler nicht beträchtlicher werden, als er bey dem ersten Stück schon ist, da das zweite Stück richtig berechnet wird.

Achtes Kapitel.

Von
der Rente des Längstlebenden
unter
mehreren Personen.

§. 277.

Die *Rente des Längstlebenden* im engeren Sinne ist eine Rente, welche bezahlt wird während der Existenz mehrerer verbundenen Personen, so lange irgend eine von ihnen lebt. Im weitern Sinne kann man jede Rente so nennen, die bezahlt

wird, so lange irgend eine Verbindung eines bestimmten Grades unter einer gewifsen Anzahl von Personen existirt, z. B. so lange aus zehn Personen noch irgend zwey zusammenleben.

Wenn die Rente des Längstlebenden unter die jedesmal noch lebenden Personen oder bestehenden Vereine getheilt wird, so dafs also der Antheil der abgegangenen Personen oder Vereine den noch bestehenden zuwächst, so heifst die zu diesem Zwekke gestiftete Verbindung von Personen eine *Tontine*, die jedoch auf mancherley Art modificirt seyn kann. Bey der Tontine kömmt nicht allein der Werth der ganzen jährlich zu zahlenden Rente in Betracht, sondern auch der Werth des wahrscheinlichen Antheils einer jeden einzelnen Person oder eines jeden Vereins eines bestimmten Grades, wenn nämlich die Tontinenrente über Verbindungen vertheilt wird.

§. 278.

Will man zuerst die Rente des längstlebenden Einzelnen als *eine Zeitrente auf das längste Leben* ansehen, und nach der Hypothese des *gleichmäfsigen Absterbens* für Personen von gleichem Alter, wovon die Ergänzung $= \alpha$ seyn mag, berechnen, so ist sie leicht zu finden. Da nämlich nach der Hypothese das längste Leben des Einzelnen, wenn die Verbindung anfänglich aus m Personen besteht,

$= \frac{m\alpha}{m + 1}$ ist, wofür man der Kürze wegen z setzen kann, und jedes Jahr die Rente 1 bezahlt werden soll, so ist die Rente des einzelnen Längstlebenden $= f\frac{1}{rz}$.

Wären also z. B. anfänglich 30 Personen, deren gemeinschaftliche Altersergänzung $= 40$ seyn mag, verbunden, so wäre $\frac{m\alpha}{m + 1} = \frac{30 \cdot 40}{31} = 38{,}7096$, und der Werth der Rente des Längstlebenden wäre nach dem 4 Procentfuſse $= f\frac{1}{1{,}04^{38{,}7096}} = 19{,}5219$.

Würde bey einer anfänglichen Verbindung von m Personen nach der Rente der längstbestehenden Verbindung nach $m - u$ gefragt, so ist nach §. 231 die Dauer der längsten Verbindung nach $m - u = \frac{u + 1}{m + 1}\alpha$ oder $= y$. Man hat also die jährlich mit 1 zu zahlende Rente der längstbestehenden Verbindung nach $m - u = f\frac{1}{ry}$.

Wenn wieder $\alpha = 40$ und $m = 30$ wäre, und nach der Rente der längsten Verbindung zu 2 gefragt würde, so ist $m - u = 2$, folglich $u = 28$, und $\frac{u + 1}{m + 1}\alpha = \frac{29 \cdot 40}{31} = 37{,}4193$;

folglich die Rente der längstbestehenden Verbindung

$$\text{zu } 2 = f\frac{1}{1{,}04^{37{,}4193}} = 19{,}2381.$$

§. 278. b.

Da übrigens die Personen der Voraufsetzung nach alle von gleichem Alter sind, und die Wahrscheinlichkeit zur Theilnahme an der Rente des Längstlebenden für alle gleich ist, so wird der Werth der Rente für jeden Einzelnen $= \frac{1}{m} f\frac{1}{rz}$.

Ist die Rente für die längstbestehende Verbindung nach $m - u$ unter m Personen von gleichem Alter gefunden, und wird der Werth dieser Rente für jede einzelne mögliche Verbindung dieses Grades gesucht, so wird, da die Anzahl der Verbindungen nach $m - u$ unter m Personen $= \frac{m \,.\, m-1 \,..\, m-u+1}{1 \,.\, 2 \,..\, m-u}$, und die Wahrscheinlichkeit zur Theilnahme wieder für jede gleichnamige Verbindung gleich, der Werth der Rente für jede Verbindung $= \frac{1 \,.\, 2 \,..\, m-u}{m\,m-1 \,..\, m-u+1} f\frac{1}{ry}$.

Anm. Die hier angegebene Rente ist jedoch, wie auch bemerkt worden, eigentlich eine Zeitrente auf das längste Leben nach der Hypothese. Sollte die Rente des Längstlebenden unter m Personen vom Alter a nach der Theorie genau angegeben werden, so wäre sie $=$

$$\frac{m}{1}\lambda a - \frac{m.m-1}{1.2}\lambda a^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\lambda a^3 - \ldots \pm \lambda a^m$$ (§. 235 und weiterhin §. 280).

§. 279.

Wird überhaupt *nach welcher Sterbensordnung es auch seyn mag* die Rente des Längstlebenden oder der längsten Verbindung gesucht, so sind hier dieselben Schlüfse anzuwenden, wodurch vorher die Dauer des längsten Lebens bestimmt wurde. Es kömmt nämlich hier, wenn die Rente des einzelnen Längstlebenden gesucht wird, wieder darauf an, wie lange von einem Verein, z. B. unter m Personen, irgend eine Person lebt, und es sollen zusammengenommen werden die Rente für die Verbindung nach m, die Ueberlebensrenten aller Verbindungen nach m — 1, nach m — 2 etc., so wie endlich die Ueberlebensrenten aller Einzelnen. Ebenfalls müssen, wenn nach der Rente der längsten Verbindung zu 2 unter den m Personen gefragt wird, zusammengenommen werden die Rente für die Verbindung nach m, die Ueberlebensrenten aller Verbindungen nach m — 1, m — 2 etc. so wie die Ueberlebensrenten aller Verbindungen zu zwey. Man erhält also hier dieselben Ausdrücke, die man nach §. 232 etc. erhielt, nur mit dem Unterschiede, dafs hier, anstatt der Dauer der Existenzen und Coexistenzen, die Leibrenten und Verbindungsrenten gesetzt werden müfsen.

Danach wird also allgemein *die Rente der längsten Verbindung* nach n bey einer anfänglichen Verbindung von n † x Personen =

$$S.\lambda\overline{N} - \frac{n}{1} S.\lambda\overline{N \dagger I} + \frac{n.n \dagger 1}{1.2} S.\lambda\overline{N \dagger II} - \frac{n.n \dagger 1.n \dagger 2}{1.2.3} S.\lambda\overline{N \dagger III} + .. \pm \frac{n.n \dagger 1 .. n \dagger x - 1}{1.2 .. x} \lambda\overline{N \dagger X}.$$

Man hat folglich die Rente des einzelnen Längstlebenden bey einer anfänglichen Verbindung von 2 Personen A und B $= S.\lambda I - \lambda\overline{II} = \lambda a + \lambda b - \lambda\overline{ab}$ (Vergl. §. 177).

Die Rente des längstlebenden Einzelnen, bey einer anfänglichen Verbindung von 3 Personen ABC, ist $= S.\lambda I - S.\lambda\overline{II} + \lambda\overline{III}$, $= (\lambda a + \lambda b + \lambda c) - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \lambda\overline{abc}$, die Rente der längsten Verbindung zu zwey $= S.\lambda\overline{II} - \frac{2}{1}\lambda\overline{III} = (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) - 2\lambda\overline{abc}$.

Bey einer anfänglichen Verbindung von 4 Personen A, B, C, D wird die Rente des längstlebenden Einzelnen $= S.\lambda I - S.\lambda\overline{II} + S.\lambda\overline{III} - \lambda\overline{IV} = \lambda a + \lambda b + \lambda c + \lambda d - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{ad} + \lambda\overline{bc} + \lambda\overline{bd} + \lambda\overline{cd}) + (\lambda\overline{abc} + \lambda\overline{abd} + \lambda\overline{acd} + \lambda\overline{bcd}) - \lambda\overline{abcd}$, die

Rente für die längste Verbindung zu 2 $= S.\lambda\,\overline{\text{II}} - \frac{2}{1} S.\lambda\,\overline{\text{III}} + \frac{2.3}{1.2}\lambda\,\overline{\text{IV}} = \lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{ad} + \lambda\,\overline{bc} + \lambda\,\overline{bd} + \lambda\,\overline{cd} - 2(\lambda\,\overline{abc} + \lambda\,\overline{abd} + \lambda\,\overline{acd} + \lambda\,\overline{bcd}) + 3\lambda\,\overline{abcd}$, und die Rente für die längste Verbindung zu 3 $= S.\lambda\,\overline{\text{III}} - \frac{3}{1}\lambda\,\overline{\text{IV}} = \lambda\,\overline{abc} + \lambda\,\overline{abd} + \lambda\,\overline{acd} + \lambda\,\overline{bcd} - 3\lambda\,\overline{abcd}$ etc. etc.

§. 280.

Wenn alle Personen *von gleichem Alter* a sind, und die Anzahl derselben im Anfange $= m$ ist, so ist die Anzahl der einzelnen Existenzen und Leibrenten $= m$, die Anzahl der Paare und Verbindungsrenten für 2 Personen $= \frac{m.m-1}{1.2}$, die Anzahl der Conternationen und Verbindungsrenten für drey Personen $= \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$, so wie überhaupt die Anzahl der Vereine nach n und Renten für diese Verbindungen $= \frac{m.m-1..m-n+1}{1.2..n}$. Für diesen Fall erhält man also die Rente *des längstlebenden Einzelnen* bey einer anfänglichen Verbindung von m

$$\text{Personen} = \frac{m}{1}\,\lambda a - \frac{m.m-1}{1.2}\,\lambda a^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\,\lambda a^3 + .. + \frac{m.m-1..1}{1.2..m}\,\lambda a^m.$$

Wird die Rente der *längstbestehenden Verbindung* nach n unter Personen von gleichem Alter a gesucht, so ist die Anzahl der Verbindungen nach n unter m Personen $= \frac{m.m-1..m-n+1}{1.2..n}$, die Anzahl der Verbindungen nach $n+1 = \frac{m.m-1..m-n}{1.2..n+1}$ etc. Folglich wird die Rente der längstbestehenden Verbindung zu n unter m

$$\text{Personen} = \frac{m.m-1..m-n+1}{1.2..n}\,\lambda a^n - \frac{n}{1}\cdot\frac{m.m-1.m-n}{1.2..n+1}\,\lambda a^{n+1} + \frac{n.n+1}{1.2}\cdot\frac{m.m-1..m-n-1}{1.2..n+2}\,\lambda a^{n+2} - .. \mp \frac{n.n+1..m-1}{1.2..m-n}\cdot\frac{m.m-1..1}{1.2..m}\,\lambda a^m.$$

§. 281.

Auf eben diese Weise, und übereinstimmend mit den §. §. 233 etc., hat man bey einer anfänglichen Verbindung von m Personen die *Rente auf das längste Ueberleben oder die Alleindauer des Einzelnen* $= S.\lambda\,\mathrm{I} - 2\,S.\lambda\,\overline{\mathrm{II}} + 3\,S.\lambda\,\overline{\mathrm{III}} -$

$4\ S.\lambda\ \overline{IV} + .. + m\ \lambda\ \overline{M}$, imgleichen die Rente *auf die Alleindauer der Verbindung zu n* bey einer anfänglichen Verbindung von $n + x =$

$$S.\lambda N - \frac{n+1}{1} S.\lambda \overline{N+I} + \frac{n+1.n+2}{1.2} S.\lambda \overline{N+II} - \frac{n+1.n+2.n+3}{1.2.3} S.\lambda \overline{N+III} - .. + \frac{n+1..n+x}{1..x} \lambda \overline{N+X}.$$

§. 282.

Sind alle Personen *von gleichem Alter a*, so ist wieder die Summe der Verbindungen nach n unter der anfänglichen Anzahl m, $=$

$\frac{m.m-1..m-n+1}{1.2..n}$, und man kann, wie in §. 280, hienach diese Summen angeben, wodurch man also die Rente auf die Alleindauer der Verbindung zu n erhält $= \frac{m.m-1..m-n+1}{1.2..n} \lambda a_n - \frac{n+1}{1} \cdot \frac{m.m-1..m-n}{1.2..n+1} \lambda a_{n+1} + \frac{n+1.n+2}{1.2} \cdot \frac{m.m-1..m-n-1}{1.2..n+2} \lambda a_{n+2} - ..$

§. 283.

Wenn man bey einer anfänglichen Verbindung

von n † x Personen den Werth der Rente auf die Dauer der *längsten Verbindung zu n, wozu irgend eine bestimmte Person*, z. B. A, *gehört*, sucht, so hat man denselben, in Uebereinstimmung mit §. 236,

$$= S.\lambda\,\overline{a.N-I} - \frac{n-1}{1}\,S.\lambda\,\overline{a.N} +$$

$$\frac{n-1.n}{1\,.\,2}\,.\,S.\lambda\,\overline{a.N\dagger I} - \frac{n-1.n.n\dagger 1}{1\,.\,2\,.\,3}\times$$

$$S.\lambda\,\overline{a.N\dagger II} - .. \pm \frac{n-1.n..n\dagger x-2}{1\,.\,2\,..\,x}\,\lambda\,\overline{a.N\dagger X-I}.$$

Also ist der Werth auf die Verbindung, worin A allein enthalten ist, da hier n = 1, folglich alle Glieder, worin n — 1 vorkömmt, = 0 sind, = $S\lambda\,a = \lambda\,a$.

§. 284.

Ebenfalls hat man aus den nämlichen Gründen die *Rente auf die Alleindauer der Verbindung nach n, worin A enthalten ist*, bey einer anfänglichen Anzahl von n † x Personen = $S.\lambda\,\overline{a.N-I}$ —

$$\frac{n}{1}\,S\,\lambda\,\overline{a.N} + \frac{n.n\dagger 1}{1\,.\,2}\,S.\lambda\,\overline{a.N\dagger I} -$$

$$\frac{n.n\dagger 1.n\dagger 2}{1\,.\,2\,.\,3}\,S.\lambda\,\overline{a.N\dagger II} + .. \pm$$

$$\frac{n.n\dagger 1\,..\,n\dagger x-1}{1\,.\,2\,..\,x}\,\lambda\,\overline{a.N\dagger X-I}.$$

Folglich wird auch der Werth der Rente auf

die Alleindauer von A, da hier $n = 1$ ist, $= \lambda a - S.\lambda \overline{a.I} + S.\lambda \overline{a.II} - S.\lambda \overline{a.III} + S.\lambda \overline{a.IV} - \ldots$

§. 285.

Wenn der *Werth des Antheils einer bestimmten Person A* an der Rente des Längstlebenden unter $m = n + x$ Personen gesucht wird, so findet man denselben folgendermaafsen. Es besteht dieser Antheil 1) aus der ganzen Rente auf die Alleindauer von A, 2) aus der Hälfte der Rente auf die Alleindauer der Verbindung zu 2, worin A enthalten ist, 3) aus $\frac{1}{3}$ der Rente auf die Alleindauer der Verbindung zu 3, worin A enthalten ist, etc. n) aus $\frac{1}{n}$ der Rente auf die Alleindauer der Verbindung zu n, worin A begriffen ist, etc. Wenn man also die Werthe der Renten auf die Alleindauer aus dem vorhergehenden §. nimmt, so wird dieser Antheil für A =

$$\left.\begin{array}{l} \lambda a - S.\lambda \overline{a.I} + S.\lambda \overline{a.II} \\ + \frac{1}{2} S.\lambda \overline{a.I} - \frac{1}{2}.2\ S.\lambda \overline{a.II} \\ + \frac{1}{3}\ S.\lambda \overline{a.II} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} - S.\lambda \overline{a.III} + S.\lambda \overline{a.IV} - S.\lambda \overline{a.V} + \\ + \frac{1}{2}.3\ S.\lambda \overline{a.III} - \frac{1}{2}.4\ S.\lambda \overline{a.IV} + \frac{1}{2}.5\ S.\lambda \overline{a.V} - \\ - \frac{1}{3}.3\ S.\lambda \overline{a.III} + \frac{1}{3}.6\ S.\lambda \overline{a.IV} - \frac{1}{3}.10\ S.\lambda \overline{a.V} + \\ + \frac{1}{4}\ S.\lambda \overline{a.III} - \frac{1}{4}.4\ S.\lambda \overline{a.IV} + \frac{1}{4}.10\ S.\lambda \overline{a.V} - \\ + \frac{1}{5}\ S.\lambda \overline{a.IV} - \frac{1}{5}.5\ S.\lambda \overline{a.V} + \\ + \frac{1}{6}\ S.\lambda \overline{a.V} - \end{array}\right.$$

$$= \lambda a - \tfrac{1}{2} S.\lambda \overline{a.I} + \tfrac{1}{3} S.\lambda \overline{a.II} - \tfrac{1}{4} S.\lambda \overline{a.III} + \tfrac{1}{5} S.\lambda \overline{a.IV} - \tfrac{1}{6} S.\lambda \overline{a.V} + ..$$

Da die Verbindungsrenten, wie aus der Ableitung folgt, immer um einen Grad steigen, und zwar bis zu $\lambda \overline{a.M-1}$, welches das letzte Glied ist, so kömmt es nur darauf an, allgemein die Summe der Theile des Coefficienten jedes Gliedes zu finden. Wenn das unbestimmte Glied $= C\ S.\lambda \overline{a.R}$ ist, so besteht der Coefficient C aus $r+1$ Theilen, wovon der letzte allezeit bejaht und $= \frac{1}{r+1}$, die übrigen aber abwechselnd verneint und bejaht sind. Jeder dieser übrigen Theile ist ein Product aus zwey Factoren, wovon der eine von unten an nach der Reihe $\frac{1}{r}, \frac{1}{r-1}, \frac{1}{r-2}$ etc., der andre aber ein Binomialcoefficient ist, dessen höchster Factor im Zähler nach §. 234 $= r$, und dessen höchster Factor im Nenner von unten auf nach der Reihe 1, 2, 3 etc. ist. Also bekömmt der Coefficient im Allgemeinen, die Theile von unten an genommen, folgende Form:

$$C = \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} \cdot \frac{r}{1} + \frac{1}{r-1} \cdot \frac{r.r-1}{1.2} - \frac{1}{r-2} \cdot \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + .. + \frac{1}{2} \cdot \frac{r.r-1..2}{1.2..r-1} - \frac{1}{1} \cdot \frac{r.r-1..1}{1.2..r}.$$

Folglich wird

$(r + 1)\ C \mp 1 = 1 - \frac{r \dagger 1}{1} + \frac{r \dagger 1 . r}{1 . 2} - \frac{r \dagger 1 . r . r - 1}{1 . 2 . 3} + .. \mp \frac{r \dagger 1 . r}{1 . 2} \pm \frac{r \dagger 1}{1} \mp 1) = (1 - r)^{r \dagger 1} = 0$, also $(r \dagger 1)\ C = \pm 1$, und $C = \pm \frac{1}{r \dagger 1}$. Hienach ist jedes rte Glied ohne Ausnahme $= \pm \frac{1}{r \dagger 1}\ S . \lambda\ \overline{a . R}$, wo das obere Zeichen steht, wenn r gerade, und das untere, wenn r ungerade ist.

§. 285. b.

Wenn *alle m Personen von gleichem Alter* sind, so bleibt zwar in dem obigen Ausdrucke das erste Glied unverändert, dagegen ist $S . \lambda\ \overline{a . I} = \frac{m - 1}{1} \lambda a^2$, denn es giebt, aufser der einen Person A, noch $m - 1$ andre, mit deren jeder die eine Person verbunden ein Paar ausmacht, $S . \lambda\ \overline{a . II} = \frac{m - 1 . m - 2}{1 . 2} \lambda a^3$, weil unter den gedachten $m - 1$ Personen $\frac{m - 1 . m - 2}{1 . 2}$ Paare sind, mit deren jedem in Verbindung die eine Person eine Conternation ausmacht, so wie überhaupt $S \lambda\ \overline{a . N} = \frac{m - 1 . m - 2 .. m - n}{1 . 2 .. n} \lambda a^{n \dagger 1}$. Für diesen

Fall wird also der Antheil des Einzelnen an der

$$\text{Rente} = \lambda a - \frac{m-1}{1} \cdot \frac{1}{2} \lambda a^2 + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} \lambda a^3 - \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4} \lambda a^4 + \ldots \pm \frac{1}{m} \lambda a^m .$$

Anm. Eben dasselbe Resultat würde man erhalten, wenn man den im §. 280 angegebenen Ausdruck für den ganzen Werth der Rente des Längstlebenden, nämlich $m \lambda a - \frac{m.m-1}{1.2} \lambda a^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \lambda a^3 - \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \lambda a^4 \dagger \ldots$, mit m, als der Anzahl aller Personen von gleichem Alter, woraus die ursprüngliche Verbindung besteht, dividirte.

§. 286.

Würde nach dem Werthe der Rente auf die *längste Verbindung nach n* gefragt, *worin die q bestimmten Personen A B C .. enthalten sind*, und wäre die anfängliche Anzahl der Personen = m, so hat man nach §. 236, wenn die Rente für den Verein der q bestimmten Personen mit λQ, imgleichen die Rente auf die Verbindung dieser Personen zusammengenommen mit irgend n — q unter den übrigen m — q mit $\lambda \overline{Q(N-Q)}$ etc. bezeichnet wird, den Werth der gesuchten Rente =

$$S.\lambda\,\overline{Q.(N-Q)} - \frac{n-q}{1}\,S.\lambda\,\overline{Q.(N-Q+I)} + \frac{n-q.n-q+1}{1\ .\ 2}\,S.\lambda\,\overline{Q.(N\text{-}Q+II)} - ..$$

Wenn $n = q$ ist, d. h. wenn die Rente auf die längste Verbindung nach q, worin die Personen Q allein enthalten sind, gesucht wird, so erhält man dieselbe $= S.\lambda\ Q = \lambda Q$.

§. 287.

Auf dieselbe Weise erhält man die Rente auf die *Alleindauer der Verbindung zu n, worin die q bestimmten Personen A B C .. enthalten sind,* wenn diese Personen wieder mit Q bezeichnet werden, $=$

$$S.\lambda\,\overline{Q.(N-Q)} - \frac{n-q+1}{1}\,S.\lambda\,\overline{Q.(N-Q+I)} + \frac{n-q+1.n-q+2}{1\ .\ 2}\,S.\lambda\,\overline{Q.(N-Q+II)} - ..$$

Folglich wäre wieder der Werth der Rente auf die Alleindauer des bestimmten Vereins Q für sich, da hier $n = q$ ist, $= \lambda Q - S.\lambda\,\overline{Q.I} + S.\lambda\,\overline{Q.II} - S.\lambda\,\overline{Q.III} + ..$

§. 288.

Wäre also die Rente solchergestalt constituirt, dafs sie bezahlt werden sollte, so lange aus einem Verein von m Personen noch irgend q zusammenleben, und würde sodann nach dem *Antheil der*

Verbindung von q bestimmten Personen A B C .., die wieder mit Q bezeichnet werden mögen, gefragt, so müfste man zusammennehmen 1) die Rente auf die Alleindauer der Verbindung von Q, 2) die Rente auf die Alleindauer der Verbindung von Q mit irgend einer der andern m — q Personen, dividirt mit der Anzahl der in q+1 enthaltenen Verbindungen nach q, d. i. mit $\frac{q+1}{1}$, 3) die Rente auf die Alleindauer der Verbindung von Q mit irgend zwey der übrigen Personen, dividirt mit der Anzahl der Verbindungen nach q unter q + 2, also mit $\frac{q+2 \cdot q+1}{1 \cdot 2}$, 4) die Rente auf die Alleindauer der Verbindung von Q mit irgend drey der übrigen Personen, dividirt mit $\frac{q+3 \cdot q+2 \cdot q+1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc. Folglich wäre der gesuchte Antheil =

$$\left.\begin{array}{l} \lambda.Q - S.\lambda\overline{Q.I} + S.\lambda\overline{Q.II} \\ + \frac{1}{q+1} S.\lambda\overline{Q.I} - \frac{1}{q+1} 2S.\lambda\overline{Q.II} \\ + \frac{1 \cdot 2}{q+2 \cdot q+1} S.\lambda\overline{Q.II} \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} - S.\lambda\overline{Q.III} + S.\lambda\overline{Q.IV} - .. \\ + \frac{1}{q+1} 3S.\lambda\overline{Q.III} - \frac{1}{q+1} 4S.\lambda\overline{Q.IV} + .. \\ - \frac{1 \cdot 2}{q+2 \cdot q+1} 3S.\lambda\overline{Q.III} + \frac{1 \cdot 2}{q+2 \cdot q+1} 6S.\lambda\overline{Q.I}^{V} - .. \\ + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{q+3 \cdot q+2 \cdot q+1} S.\lambda\overline{Q.III} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{q+3 \cdot q+2 \cdot q+1} 4S.\lambda\overline{Q.IV} + .. \\ + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{q+4 \cdot q+1} S.\lambda\overline{Q.IV} - .. \end{array}\right.$$

Die Summen der Verbindungsrenten folgen hier wieder der Ordnung nach auf einander von $S.\lambda\, Q = \lambda\, Q$ an durch jeden höhern Grad bis zu $S.\lambda\, \overline{Q\,(M-Q)} = \lambda\, M$. Bezeichnet man ferner ein unbestimmtes Glied mit C $S.\lambda\, \overline{Q.R}$, so ist der Coefficient oder C eine Summe von $r+1$ abwechselnd bejahten und verneinten Producten, wovon jedes wieder aus zwey Producten zusammengesetzt ist. Das erstere Product im ersten Theile, von unten an genommen, fängt im Zähler mit 1 an und geht nach der Ordnung der natürlichen Zahlen bis r fort, im Nenner aber fängt es mit $q+1$ an und geht nach der Ordnung der natürlichen Zahlen bis $q+r$ fort. Das erstere Product im zweiten Theil von unten fängt wieder im Zähler mit 1 und im Nenner mit $q+1$ an, geht aber nach der Ordnung der natürlichen Zahlen im Zähler nur bis $r-1$ und im Nenner bis $q+r-1$ etc. Das andre Product des ersten Theils von unten ist ein Binomialcoefficient, der im Zähler mit r anfängt und im Nenner mit r aufhört. Das andre Product des zweiten Theils von unten ist ein Binomialcoefficient, der im Zähler mit r anfängt und im Nenner mit $r-1$ aufhört, etc. Also ist überhaupt, die Theile von unten an genommen,

$$C = \frac{1\,..\,r}{q+1\,..\,q+r}\cdot\frac{r\,..\,1}{1\,..\,r} - \frac{1\,..\,r-1}{q+1\,..\,q+r-1}\cdot\frac{r\,..\,2}{1\,..\,r-1} + \frac{1\,..\,r-2}{q+1\,..\,q+r-2}\cdot\frac{r\,..\,3}{1\,..\,r-2} -$$

$$.. \pm \frac{1}{q \dagger 1} \cdot \frac{r}{1} \mp 1 = \frac{r \,..\, 1}{q \dagger 1 \,..\, q \dagger r} - \frac{r \,..\, 2}{q \dagger 1 \,..\, q \dagger r - 1} + \frac{r \,..\, 3}{q \dagger 1 \,..\, q \dagger r - 2} - .. \pm \frac{r}{q \dagger 1} \mp 1),$$

welche Reihe $= \pm \frac{q}{q \dagger r}$ ist, (S. die Anmerkung unten), und steht das obere Zeichen, wenn r eine gerade Zahl ist, das untere aber, wenn r ungerade ist. Hiernach wird also der Rentenantheil der bestimmten Verbindung Q

$$= \lambda Q - \frac{q}{q \dagger 1} S.\lambda \overline{Q.I} + \frac{q}{q \dagger 2} S.\lambda \overline{Q.II} - \frac{q}{q \dagger 3} S.\lambda \overline{Q.III} + ..$$

(Setzte man hier $q = 1$, so erhielte man, wie im §. 285, $C = \frac{1}{r \dagger 1}$, und den Rentenantheil $= \lambda a - \frac{1}{2} S\lambda \overline{a.I} + \frac{1}{3} S\lambda \overline{a.II} - ..$).

Anm. Dafs $\frac{r \,.\, r-1 \,..\, 1}{q \dagger 1 . q \dagger 2 \,..\, q \dagger r} - \frac{r \,.\, r-1 \,..\, 2}{q \dagger 1 . q \dagger 2 \,..\, q \dagger r-1} + \frac{r \,.\, r-1 \,..\, 3}{q \dagger 1 . q \dagger 2 \,..\, q \dagger r-2} - .. \pm \frac{r \,.\, r-1}{q \dagger 1 . q \dagger 2} \mp \frac{r}{q \dagger 1} \pm 1 = \mp \frac{q}{q \dagger r}$ ist, erhellet folgendermaafsen. Es ist nämlich die Summe der beiden ersten Glieder, oder $\frac{r \,.\, r-1 \,..\, 1}{q \dagger 1 . q \dagger 2 \,..\, q \dagger r} - \frac{r \,.\, r-1 \,..\, 2}{q \dagger 1 . q \dagger 2 \,..\, q \dagger r-1} =$

$$\frac{r.r-1\;..\;1}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r}-\frac{(q\dagger r)\,r.r-1\;..\;2}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r}$$

$$=-\frac{(q\dagger r-1)\,r.r-1\;..\;2}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r}$$

$$=-\frac{r.r-1\;..\;2}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r-2}\cdot\frac{1}{q\dagger r}.$$

Ferner ist die Summe der drey ersten Glieder $=-$

$$\frac{r.r-1\;..\;2}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r-2}\cdot\frac{1}{q\dagger r}$$

$$+\frac{r.r-1\;..\;3}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r-2}=-$$

$$\frac{r.r-1\;..\;2}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r-2}\cdot\frac{1}{q\dagger r}+$$

$$\frac{(q\dagger r)\,r.r-1\;..\;3}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r-2}\cdot\frac{1}{q\dagger r}=$$

$$+\frac{(q\dagger r-2)\,r.r-1\;..\;3}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r-2}\cdot\frac{1}{q\dagger r}=$$

$$\mp\frac{r.r-1\;..\;3}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r-3}\cdot\frac{1}{q\dagger r}$$

etc. Auf die nämliche Weise hat man die Summe der n ersten Glieder $=\pm\frac{r.r-1\;..\;n}{q\dagger 1.q\dagger 2\;..\;q\dagger r-n}\cdot\frac{1}{q\dagger r}$,

wo das obere Zeichen steht, wenn n ungerade, und das untere, wenn n gerade ist, und der erstere Bruch im Nenner einen Factor weniger hat als im Zähler. Bey dem r — 1ten Gliede, welches $=\frac{r.r-1}{q\dagger 1.q\dagger 2}$, wird also die Summe

$=\mp\frac{r.r-1}{q\dagger 1}\cdot\frac{1}{q\dagger r}$. Dann ist $\mp\frac{r.r-1}{q\dagger 1.q\dagger r}\pm\frac{r}{q\dagger 1}=\mp\frac{r.r-1}{q\dagger 1.q\dagger r}\pm$

$\frac{(q \dagger r)\, r}{q \dagger 1.q \dagger r} = \pm \frac{r}{q \dagger r}$, und endlich $\pm \frac{r}{q \dagger r} \mp 1 = \mp \frac{q}{q \dagger r}$.

§. 288. b.

Wenn *alle m Personen von gleichem Alter a sind*, so ist in dem vorhergehenden §. $S.\lambda\, \overline{Q.I} = \frac{m-q}{1} \lambda\, aq\dagger 1$, indem die q bestimmten Personen mit jeder der m — q übrigen eine Verbindung nach q † 1 ausmachen und die Summe dieser Verbindungen = m — q ist; ferner ist $S.\lambda\, \overline{Q.II} = \frac{m-q.m-q-1}{1 \cdot 2} \lambda aq\dagger 2$, weil es unter den m — q Personen $\frac{m-q.m-q-1}{1 \cdot 2}$ Paare giebt, mit deren jedem in Verbindung die q bestimmten Personen eine Verbindung nach q † 2 ausmachen; eben so wird $S.\lambda\, \overline{Q.III} = \frac{m-q.m-q-1.m-q-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \lambda aq\dagger 3$, aus dem nämlichen Grunde etc. Also wird in diesem Falle $\lambda Q - \frac{q}{q \dagger 1}.S.\lambda\, \overline{Q.I} + \frac{q}{q \dagger 2}.S.\lambda\, \overline{Q.II} - \frac{q}{q \dagger 3}.S.\lambda\, \overline{Q.III} + .. = \lambda\, aq - \frac{q}{q\dagger 1}.\frac{m-q}{1} \times$

$$\lambda\, aq\dagger 1 + \frac{q}{q\dagger 2}\cdot\frac{m-q.m-q-1}{1\cdot 2}\,\lambda\, aq\dagger 2$$

$$-\frac{q}{q\dagger 3}\cdot\frac{m-q.m-q-1.m-q-2}{1\cdot 2\cdot 3}\,\lambda\, aq\dagger 3$$

$+ \ldots$ (Setzte man hierin $q = 1$, so erhielte man den bereits im §. 285. b. angeführten Ausdruck).

§. 289.

Wenn nach dem gänzlichen Abgange einiger bestimmten Personen andre mit ihnen verbundene eine Rente auf das längste Leben oder irgend eine bestimmte längste Verbindung genieſsen sollen, so nehmen die Ausdrücke dafür eine von den vorhergehenden verschiedene Form an. Da Fälle dieser Art selten vorkommen, so scheint es nicht nöthig, eine allgemeine Regel dafür aufzustellen; in den einzelnen Fällen kann man die Renten für diejenigen Verbindungen zusammennehmen, die unter der gegebenen Bedingung enthalten sind. Sollten z. B. nach dem gänzlichen Abgange von F und G die Personen A, B und C die jährliche Rente genieſsen, so lange irgend eine von ihnen lebt, so müſste man zusammennehmen die Leibrenten für die Fälle, 1) wo eine Person, A, B oder C, allein lebt und alle übrigen todt sind, 2) wo zwey überlebende Personen, also AB, AC oder BC, existiren und die übrigen verstorben sind, 3) wo alle drey Ueberlebende existiren und die beiden zu überlebenden Personen otdt sind. Hienach erhielte man dengesuchten

Werth $= (\lambda a + \lambda b + \lambda c) - (\lambda \overline{ab} + \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{bc} + \lambda \overline{af} + \lambda \overline{ag} + \lambda \overline{bf} + \lambda \overline{bg} + \lambda \overline{cf} + \lambda \overline{cg}) + (\lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abf} + \lambda \overline{abg} + \lambda \overline{acf} + \lambda \overline{acg} + \lambda \overline{bcf} + \lambda \overline{bcg} + \lambda \overline{afg} + \lambda \overline{bfg} + \lambda \overline{cfg}) - (\lambda \overline{abcf} + \lambda \overline{abfg} + \lambda \overline{abcg} + \lambda \overline{acfg} + \lambda \overline{bcfg}) + \lambda \overline{abcfg}$. Wenn man die vorher angegebenen Bezeichnungen gebraucht, und dabey die überlebenden Personen durch eingeklammerte Zahlen andeutet, so kann man den angeführten Werth ausdrucken durch:

$S.\lambda\,(I) - S.\lambda\,(II) + S.\lambda\,(III)$
$- S.\lambda\,(I)I + S.\lambda\,(II)I - S.\lambda\,(III)I$
$+ S.\lambda\,(I)II - S.\lambda\,(II)II + S.\lambda\,(III)II.$

§. 290.

Die vorhergehenden §. §. enthalten die theoretischen Regeln zur Berechnung der *Tontinen*. Gewöhnlich wird aber die Tontinenrente nicht nach Verbindungen, sondern unter die einzelnen Personen vertheilt, wenn gleich unter gewifsen Bedingungen mehrere Personen in eine Art von Gemeinschaft treten können, wovon weiter unten geredet werden wird. Auch werden meistens nur Personen von gleichem oder beinahe gleichem Alter in eine und dieselbe Claſse aufgenommen, wo man dann irgend ein gemeinschaftliches Alter zum Grunde legt. Für eine solche Tontine gilt also die im §. 280 angeführte Formel, wonach der Werth der

Tontinenrente, die jährlich mit 1 bezahlt werden soll, wenn a das Alter der Tontinisten und m ihre anfängliche Anzahl bedeutet, $= m\,\lambda a - \frac{m.m-1}{1.2}\lambda a^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\lambda a^3 - \ldots \pm m\,\lambda a^{m-1} \mp \lambda a^m$, und der Antheil eines jeden Einzelnen $= \lambda a^m - \frac{m-1}{1.2}\lambda a^2 + \frac{m-1.m-2}{1.2.3}\lambda a^3 - \ldots \pm \lambda a^{m-1} \mp \frac{1}{m}\lambda a^m$ ist.

Es hat jedoch diese Formel eben so viel Glieder als die Anzahl der in Verbindung tretenden Tontinisten Einheiten enthält, und, da diese, um die Einrichtung für die Theilnehmer anlockend zu machen, gewöhnlich ziemlich grofs angenommen wird, so ist auch hier eine Anwendung der theoretischen Regeln mit beinahe unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden. Bey Berechnung der Tontine für eine beträchtliche Anzahl von Personen wird man daher mit einer *Näherung* zufrieden seyn müssen, und es scheint am natürlichsten und bequemsten, hiebey die Zeitrenten auf das längste Leben, dafselbe nach der Hypothese berechnet, zum Grunde zu legen, und mit Rücksicht auf die Sterbensordnung, welche man sonst für die pafsendste hält, folgendermaafsen zu corrigiren.

Wenn man die wahren Werthe der Tontinen bis zu einem gewifsen Grade hat, und dieselben mit den Zeitrenten auf das nach der Hypothese berechnete längste Leben für die nämlichen Verbindungsgrade vergleicht, so findet man, dafs die letzteren zwar etwas gröfser als die gleichnamigen wahren Tontinenwerthe sind, dafs aber bey gleichem Alter der Unterschied um so geringer wird, je gröfser die Anzahl der Personen in der Tontine ist. Wird nun der Werth der Tontine für einen höhern Verbindungsgrad als man genau berechnet hat verlangt, so suche man die Zeitrente für das nach der Hypothese berechnete längste Leben unter der gegebenen Anzahl von Personen, wobey man die Altersergänzung unmittelbar aus der zum Grunde zu legenden Sterbensordnung nimmt, und nehme dann an, dafs der richtige Tontinenwerth sich zu dem eben gefundenen, jedoch mit einer Annäherung, verhalte wie der bekannte wahre Werth für den niedern Verbindungsgrad zu dem Werthe der Zeitrente auf das hypothetische längste Leben für diesen Verbindungsgrad. Wenn W den gesuchten Näherungswerth der Tontine für die Verbindung nach m und H den gefundenen Zeitrentenwerth auf das längste Leben für denselben Grad bezeichnen, auch w und h die nämlichen genau berechneten Gröfsen für einen niedrigern Verbindungsgrad n bedeuten, so ist

ziemlich genau $W = \left(\frac{w}{h}\right)^{\frac{n}{m}} H$, oder wenn

man $(\frac{w}{h})^n = Q$ setzt, $W = Q^{\frac{1}{m}} H$. Von je höherem Verbindungsgrade die Werthe w und h genommen sind, desto mehr nähert man sich dem wahren Werthe.

Es ist z. B. zufolge der von Herrn Brune nach Deparcieux's Sterbensordnung und zu 4 Procent berechneten Tabelle der Werth der Tontine für 3 Personen von 40 Jahren = 19,014; das längste Leben unter den drey Personen für die Altersergänzung von 57, nach der Hypothese berechnet, ist = $42\frac{1}{4}$ Jahre, und die Zeitrente zu 4 Procent auf diese Zeit = 20,324. Folglich hätte man hienach $Q = (\frac{19,014}{20,324})^3 = 0,81883$. Legt man diesen Werth zum Grunde, so erhält man den Näherungswerth der Tontine für vier Personen = $Q^{\frac{1}{4}}$ 20,818 = 19,710, für 5 Personen = $Q^{\frac{1}{5}}$.21,119 = 20,291 und für sechs Personen = $Q^{\frac{1}{6}}$. 21,321 = 20,622. Die wahren Werthe sind für vier Personen = 19,548, für fünf Personen = 19,878 und für sechs Personen = 20,105. Bestimmte man in diesem Falle Q aus den gegebenen Werthen der Tontine für vier Personen, so erhielte man den Näherungswerth für fünf Personen = 20,082, für sechs Personen aber = 20,272. Legte man in demselben Beispiele bey Q die Werthe für fünf Personen zum Grunde, so hätte man den Näherungswerth für sechs Personen = 20,231.

Die hier weiter unten folgende Tabelle enthält unter a die wahren Werthe der Tontinen bis zu sechs Personen, so wie Herr Brune diese Werthe nach Deparcieux's Sterbensordnung und dem Zinsfuſse von 4 Procent angiebt. Auch sind darin unter b die Näherungswerthe nach der von Brune angenommenen Regel, die weiter unten erwähnt werden wird, imgleichen unter h und k die Näherungswerthe, die nach der obigen Regel, und zwar sowohl aus den Tontinen für zwey als für drey Personen, berechnet worden, aufgeführt. Man sieht daraus, daſs die Näherungswerthe für das Alter von 10 Jahren den wahren Werthen ziemlich nahe kommen; für die niedrigern Jahre sind sie etwas kleiner als die wahren Werthe, wogegen sie für die höhern Jahre gröſser werden. Geht das Alter bis zu 60 Jahren und darüber, so sind die aus den Tontinen für zwey und drey Personen berechneten Näherungswerthe kaum zu gebrauchen. Man müſste daher, besonders wenn der Werth der Rente für Personen unter 10 oder über 60 Jahre gesucht würde, die Werthe der Tontine für fünf oder sechs Personen bey Berechnung von Q zu Grunde legen, wobey der Unterschied nicht so beträchtlich ausfällt.

Anm. 1. Es fehlt jedoch der angegebenen Methode an derjenigen Bestimmtheit, welche für die Wiſsenschaft zu wünschen ist. Doch scheint es nicht möglich, hier einen besseren Ausweg zu finden, wenn man nicht die Arbeit übernehmen will, die Tontinenwerthe bis zu einem solchen Grade zu

berechnen, dafs der Unterschied zwischen den Tontinen und den Zeitrenten auf das längste Leben nach der Hypothese als unbeträchtlich angesehen werden kann.

Florencourt setzt in seinen Abhandlungen S. 144 die Gränze des längsten Lebens da, wo von den anfänglich verbundenen Personen weniger als $\frac{1}{2}$ existirt. Wenn nun A die zu dem anfänglichen Alter der Tontinisten gehörige Zahl der Lebenden und m die Anzahl derselben bezeichnet, so müfste man in der Mortalitätstabelle suchen, zu welchem Alter als Zahl der Lebenden $\frac{A}{2m}$ gehört, oder eigentlich, wo zuerst die Zahl der Lebenden kleiner als $\frac{A}{2m}$ wird, um diese Gränze des längsten Lebens zu finden. Die Tontine berechnet Florencourt als eine Zeitrente auf das von ihm angegebenermaafsen bestimmte längste Leben. Dafs dies nicht theoretisch richtig sey, ergiebt sich schon aus dem Vorhergehenden. Auch weichen, besonders wenn die anfängliche Anzahl der Tontinisten klein ist, die solchergestalt berechneten Näherungswerthe von den wahren Werthen beträchtlich ab. Für das 5oste Jahr ist z. B. nach Deparcieux's Sterbensordnung $A = 3964$; danach wird also, wenn man m erst $= 3$, nachher $= 6$ nimmt, $\frac{A}{2m}$ das einemal $= 661$, das andremal $= 330$, wovon die erstere Zahl zu dem Altersjahr 82, die letztere zu 85 gehört, und die Zeitrente zu 4 Procent auf diese Jahre ist einmal $= 17{,}873$, das andremal $= 18{,}665$, Die wahren Werthe dieser Tontinen sind im ersten Fall $= 16{,}644$, im zweiten Falle $= 17{,}992$.

Tetens nimmt in seiner Einleitung etc. S. 535 an, dafs beinahe die Verbindungsrenten der aufeinanderfolgenden Grade eine geometrische Progression ausmachen, so dafs $\lambda a : \lambda a^2 = \lambda a^2 : \lambda a^3$, und überhaupt $\lambda a : \lambda a^2 = \lambda am : \lambda am+1$.

Wenn man nun $\frac{\lambda a^2}{\lambda a} = t$ setzt, so wird der Werth der Tontine für m Personen $= m\lambda a - \frac{m.m-1}{1.2} t\lambda a - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} t^2 \lambda a + .. + t^{m-1} \lambda a$, woraus man den Werth der Tontine oder $W = [1 - (1-t)^m] \frac{\lambda a}{t}$, und wenn man im Nenner $\frac{\lambda a^2}{\lambda a}$ anstatt t setzt, $W = [1 - (1-t)^m] \frac{(\lambda a)^2}{\lambda a^2}$ erhält. Wenn nun m sehr grofs wird, so nähert sich, da t, und also auch $1 - t$, ein ächter Bruch ist, $(1-t)^m$ dem Werthe von o, und wenn $m = \infty$, so wird $W = \frac{(\lambda a)^2}{\lambda a^2}$. Indefsen trifft die Voraufsetzung, dafs die Verbindungsrenten der aufeinanderfolgenden Grade in einer geometrischen Progression fortgehen, bey weitem nicht zu. So ist z. B. nach Deparcieux's Sterblichkeitstafel und dem Zinsfufse zu 4 Procent für das Alter von 10 Jahren $\frac{\lambda a^2}{\lambda a} = \frac{16,152}{19,018} = 0,849$, aber $\frac{\lambda a^3}{\lambda a^2} = \frac{14,107}{16,152} = 0,873$ etc., und weiterhin nimmt das Verhältnifs noch mehr zu; es ist z. B. $\frac{\lambda a^6}{\lambda a^5} = \frac{10,281}{11,298} = 0,9100$. Auch wird, dieser Methode zufolge, nach der nämlichen Sterbensordnung und für das eben angegebene Alter die Gränze des Werthes der Tontine oder $\frac{(\lambda a)^2}{\lambda a^2} = \frac{19,018^2}{16,15\ 2}$

$= 22{,}592$, wogegen die genaue Berechnung den wahren Werth der Tontine für sechs Personen schon zu 23,529 giebt. Für a $= 70$ wird $\frac{(\lambda a)^2}{\lambda a^2} = \frac{6{,}516^2}{4{,}299} = 9{,}876$, wogegen der wahre Werth für die Tontine von sechs Personen schon $= 11{,}475$ ist, Diese Unterschiede sind für eine Näherung doch zu grofs.

Herr *Brune* druckt in seiner Berechnung etc. S. 135 den Näherungswerth der Tontine, wenn n die Anzahl und x die Altersergänzung der Personen ist, durch $W = Q^{\frac{1}{m}} \int \frac{1}{r^x}$ aus, und bestimmt Q durchgängig aus den gegebenen Werthen der Tontine für zwey Personen, nämlich $Q = \left(\frac{2\lambda a - \lambda a^2}{\int \frac{1}{rx}}\right)^2$. Da hier aber überall die Gränze des Werths der Tontine für das gegebene Alter, nämlich $\int \frac{1}{rx}$, zum Grunde gelegt wird, so fallen im Allgemeinen diese Werthe etwas gröfser aus als die von mir angegebenen. Nach dieser Regel wird z. B. der Werth der Tontine für 6 Personen vom Alter 60 $= 16{,}538$; nach der von mir vorgeschlagenen Methode wird er, aus der Tontine für 5 Personen hergeleitet, $= 15{,}421$; der wahre Werth ist $= 15{,}122$.

Anm. 2. Wenn bey Tontinen die Personen nach dem Alter in Claſsen eingetheilt werden, so mufs man der Sicherheit wegen die Berechnung der Claſsen nicht nach dem Mittel des Alters, sondern nach dem jüngsten Alter der Claſse, einrichten. Wenn z. B. die Claſse für die Jahre von 11 bis 20 aus hundert Personen bestände, so könnte es sich zutragen, dafs darunter zwanzig vom Alter 11 wären; rechnete man nun den Werth der Tontine nach dem Mittelalter von 15 Jahren,

so erhielte man denselben zu 4 Procent sehr nahe = 23,961; dagegen würde die Tontine für die 20 Personen vom Alter 11 allein schon beinahe = 23,964 seyn. Für Personen unter 10 Jahren müfste man also die Rente so wie für Neugebohrne berechnen.

Oft wird es bey Tontineplanen gestattet, dafs mehrere Personen zusammen unter einer einzigen Nummer eingehen, so dafs sie, so lange eine derselben lebt, an der Tontinenrente Antheil nehmen. Gewöhnlich wird dabey festgesetzt, dafs alle diese Personen in die Clafse eintreten sollen, die dem Alter der jüngsten unter ihnen zukömmt, imgleichen dafs für jede Person eine besondre Actie genommen werden solle, und es werden meistens eigne Abtheilungen für solche verbundene Personen errichtet. Streng genommen sollte dies nicht gestattet seyn, da solche verbundene Personen unter sich wieder eine kleinere Tontinengesellschaft ausmachen, und weil sowohl die Anzahl der unter einer Nummer eintretenden Personen als der Unterschied des Alters in jedem einzelnen Verein verschieden seyn kann, diese einzelnen Vereine unter sich sehr ungleich behandelt werden, wenn sie auch jeder nach dem Alter der jüngsten Person eintreten. Dabey wird ein einzelner Verein für die ganze Abtheilung um so lästiger, je gröfser die Anzahl der Personen und je kleiner der Unterschied ihres Alters ist; wenn z. B. vier Personen, jede von 30 Jahren, unter einer Nummer eintreten, so ist das längste Leben unter ihnen nach der Hypothese = $55\frac{3}{5}$ Jahre; wenn zwey Personen eine von 30, die andre von 50 Jahren, unter eins eintreten, so ist ihr längstes Leben nach der Hypothese = 39 Jahre; nach der gewöhnlichen Einrichtung aber werden beide Parthien in die nämliche Clafse aufgenommen.

Indefsen ist die angeführte Einrichtung gewöhnlich, und wird von Familien, die das einzuschiefsende Kapital gern gemeinschaftlich benutzen wollen, häufig gewünscht. Eigentlich sollte man, um die aus dieser Einrichtung entstehenden Unzu-

träglichkeiten so viel als thunlich zu vermeiden, festsetzen, dafs die Clafse, in welche solche Parthien eingehen müfsen, nach dem längsten Leben in denselben bestimmt werden solle. Es lafsen sich aber die Regeln für diese Berechnung nicht wohl solchergestalt angeben, das jeder Intereſsent die Richtigkeit des Verfahrens bey seiner Clafsification beurtheilen kann, welches doch für ein Institut dieser Art zu wünschen ist. Man könnte jedoch jenen Unzuträglichkeiten einigermaafsen durch die Bestimmung entgehen, dafs, wenn zwey oder mehrere Personen in einer solchen Parthie von gleichem Clafsenalter sind, sie zusammen in die nächstjüngere oder eine der andern jüngern Clafsen eintreten müfsten.

Tontinenwerthe

nach Deparcieux's Sterbensordnung

zu 4 Procent.

a, Wahrer Werth.

b, Näherungswerth nach Brune's Methode.

h und k, Näherungswerth nach §. 290.

Alter		2 Personen	3 Personen	4 Personen	5 Personen	6 Personen
0	a	18,637	21,173	22,393	23,018	23,361
	b		20,400	21,343	21,930	22,330
	h		20,463	21,421	22,009	22,406
	k			21,976	22,464	22,791
10	a	21,885	22,707	23,047	23,227	23,329
	b		23,386	23,581	23,698	23,832
	h		22,690	23,083	23,314	23,464
	k			23,096	23,324	23,527
20	a	20,938	21,847	22,246	22,467	22,609
	b		21,845	22,314	22,599	22,792
	h		21,902	22,384	22,671	22,861
	k			22,341	22,637	22,831
30	a	19,743	20,691	21,142	21,408	21,586
	b		20,832	21,399	21,747	21,982
	h		20,872	21,450	21,800	22,033
	k			21,310	21,686	21,938

Fortsetzung.

Alter		2 Personen	3 Personen	4 Personen	5 Personen	6 Personen
40	a	17,976	19,014	19,543	19,878	20,105
	b		19,322	20,033	20,472	20,770
	h		19,338	19,961	20,498	20,797
	k			19,710	20,291	20,622
50	a	15,464	16,644	17,288	17,701	17,992
	b		17,136	18,039	18,603	18,989
	h		17,124	18,027	18,594	18,982
	k			17,647	18,280	18,714
60	a	12,345	13,579	14,296	14,774	15,122
	b		14,288	15,372	16,062	16,538
	h		14,337	15,396	16,074	16,545
	k			14,781	15,559	16,102
70	a	8,733	9,873	10,592	11,096	11,475
	b		10,759	11,942	12,713	13,255
	h		10,696	11,862	12,631	13,177
	k			11,043	11,929	12,563
80	a	5,207	6,100	6,689	7,113	7,437
	b		6,908	7,957	8,662	9,165
	h		6,845	7,873	8,573	9,077
	k			7,221	8,000	8,569
90	a	1,847	2,267	2,564	2,790	2,973
	b		2,736	3,330	3,746	4,052
	h		2,681	3,260	3,673	3,981
	k			2,874	3,321	3,660

Neuntes Kapitel.

Von

Anwartschaften,

die vom Leben mehrerer Personen

abhangen.

§. 291.

Wenn eine Summe = 1 nach n Jahren unter der Bedingung ausbezahlt werden soll, dafs dann ein Verein aus mehreren Personen, z. B. A, B .. D, noch bestehe, so ist der jetzige Werth der gedachten Summe $= \frac{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} .. D^{\overline{n}}}{AB .. D} \cdot \frac{1}{r^n}$;

denn $\frac{1}{r^n}$ ist der unbedingte Werth der Summe 1, die nach n Jahren bezahlt werden soll, und die Wahrscheinlichkeit, dafs irgend ein bestimmter Verein unter den Personen AB .. D am Ende des nten Jahrs noch bestehe, ist $= \frac{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} .. D^{\overline{n}}}{AB .. D}$.

Sollte dagegen die Summe 1 wieder am Ende des nten Jahrs unter der Bedingung bezahlt werden, dafs keine der Personen AB .. D mehr lebte, so wäre ihr Werth =

$$\frac{(A - A^{\overline{n}})\,(B - B^{\overline{n}})\;..\;(D - D^{\overline{n}})}{A\;B\;..\;D}\,\frac{1}{r^n},$$

wo der erste Factor die Wahrscheinlichkeit ausdruckt, dafs ein bestimmter Verein am Ende des nten Jahrs ganz ausgestorben sey.

§. 292.

Wenn die Summe 1 am Ende des nten Jahrs fällig wäre unter der Bedingung, dafs A noch lebte, die übrigen Personen aber gestorben wären, so hätte man den Werth derselben =

$$\frac{A^{\overline{n}}\,(B - B^{\overline{n}})\;..\;(D - D^{\overline{n}})}{A\;B\;..\;D}\cdot\frac{1}{r^n},$$

wo der erste Factor die Wahrscheinlichkeit angiebt, dafs am Ende des nten Jahrs aus dem bestimmten Verein A noch lebt, die übrigen Personen aber verstorben sind.

Falls aber die Summe 1 bezahlt werden sollte zu der nämlichen Zeit unter der Bedingung, dafs am Ende des nten Jahrs noch irgend eine der Personen A B .. D aus der bestimmten Verbindung lebte, so wäre ihr Werth =

$$\frac{AB..D - (A-A^{\overline{n}})\,(B-B^{\overline{n}})\;..\;(D-D^{\overline{n}})}{A\;B\;..\;D}\cdot\frac{1}{r^n}$$

$$= \left[1 - \frac{(A-A^{\overline{n}})\,(B-B^{\overline{n}})\;..\;(D-D^{\overline{n}})}{A\;B\;..\;D}\right]\frac{1}{r^n}.$$

Wenn man nämlich von den anfänglich existirenden Vereinen diejenigen abzieht, die am Ende des nten Jahrs ganz ausgestorben sind, so bleiben diejenigen übrig, von denen dann noch irgend eine Person lebt.

§. 293.

Falls eine Anzahl von Vereinen, von denen jeder aus den Personen A B .. D besteht, sich dahin verbände, dafs für jeden Verein am Ende des Jahrs, worin er durch den Tod eines oder mehrerer Interefsenten aufgelöfet wird, die Summe I bezahlt werden sollte, so wäre der gegenwärtige Werth dieser Summe $= \frac{\Delta\,(A^{o}B^{o}\,..\,D^{o})}{A\,B\,..\,D\,r} + \frac{\Delta\,(A^{1}B^{1}\,..\,D^{1})}{A\,B\,..\,D\,r^{2}} + \frac{\Delta\,(A^{2}B^{2}\,..\,D^{2})}{A\,B\,..\,D\,r^{3}} + .. = \frac{1}{AB\,..\,D\,r}\int\frac{\Delta\,(A'^{o}B'^{o}\,..\,D'^{o})}{r^{o}}$.

Da nun nach §. 243 $\lambda\,\overline{a\,b\,..\,d} = p - \frac{p}{A\,B\,..\,D}\int\frac{\Delta\,(A'^{o}B'^{o}\,..\,D'^{o})}{r^{o}}$, folglich $\frac{1}{AB\,..\,D.r}\int\frac{\Delta\,(A'^{o}B'^{o}\,..\,D'^{o})}{r^{o}} = \frac{1}{r} - \frac{\lambda\,(a\,b\,..\,d)}{p\,r}$, so hat man auch den gesuchten Werth $= \frac{1}{r}\,(1 - \frac{\lambda\,\overline{a\,b\,..\,d}}{p})$. Der

Kürze wegen soll diese Gröfse, nämlich der Werth des Thalers, der für jeden Verein am Ende des Jahrs, worin derselbe aufgelöfet wird, fällig ist, hier mit $\vartheta \overline{\text{ab .. d}}$ bezeichnet werden, und es ist also hiernach

$$\vartheta \overline{\text{ab .. d}} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{\lambda(\text{ab .. d})}{p}\right].$$

§. 294.

Wenn man annimmt, dafs in jedem Jahre, für sich genommen, die Auflösung *der Verbindungen* gleichmäfsig und continuirlich geschehe und dafs die Summe 1 für jeden Verein sofort bey der Auflösung bezahlt werde, so ist der gegenwärtige Werth dieser Summe

$$= \frac{\pi}{p} \vartheta . \overline{\text{ab .. d}}.$$

Soll aber der Abgang der *Einzelnen* in jedem Jahre für sich gleichmäfsig seyn, so kann nicht zugleich die Auflösung der Verbindungen gleichmäfsig geschehen, und unter dieser Voraufsetzung findet man den baaren Werth der für jede aufgelöste Verbindung zu zahlenden Summe 1 folgendermaafsen. Wenn die anfängliche Verbindung aus m Personen A B .. F und das Jahr aus n gleichen Theilen besteht, so ist die Anzahl der ungetrennten Vereine während des ersten Jahrs im Anfange des ersten Zeittheils $=$ A B C .. K, ferner am Ende des 1sten, 2ten, 3ten und nten Zeittheils nach einander

$$(A - \frac{1}{n}\Delta A)\ (B - \frac{1}{n}\Delta B)\ (C - \frac{1}{n}\Delta C)..(K - \frac{1}{n}\Delta F),$$

$$(A - \frac{2}{n}\Delta A)\ (B - \frac{2}{n}\Delta B)\ (C - \frac{2}{n}\Delta C)..(K - \frac{2}{n}\Delta F),$$

$$(A - \frac{3}{n}\Delta A)\ (B - \frac{3}{n}\Delta B)\ (C - \frac{3}{n}\Delta C)..(K - \frac{3}{n}\Delta F),$$

$$(A - \frac{n}{n}\Delta A)\ (B - \frac{n}{n}\Delta B)\ (C - \frac{n}{n}\Delta C)..(K - \frac{n}{n}\Delta F).$$

Wenn man aber jedes Product für sich entwickelt, und die Summe der Producte von je m — 1 unter den m Hauptzahlen in dasjenige Decrement, dessen Hauptzahl in dem Product nicht enthalten ist, mit $\mathfrak{P}$, ferner die Summe der Producte von je m—2 unter den m Hauptzahlen in das Product derjenigen zwey Decremente, deren Hauptzahlen in dem erstern Producte nicht enthalten sind, mit $\mathfrak{Q}$, eben so das Product von je m — 3 der m Hauptzahlen in das Product derjenigen drey Decremente, deren Hauptzahlen im erstern Producte nicht vorkommen, mit $\mathfrak{R}$ etc. bezeichnet, so ist die Zahl der bestehenden Vereine nach m anfänglich = ABC . . K, ferner am Ende des 1sten, 2ten, 3ten und nten Zeittheils nach einander

$$ABC..K - \frac{1}{n}\mathfrak{P} + \frac{1}{n^2}\mathfrak{Q} - \frac{1}{n^3}\mathfrak{R} + ..,$$

$$ABC..K - \frac{2}{n}\mathfrak{P} + \frac{2^2}{n^2}\mathfrak{Q} - \frac{2^2}{n^3}\mathfrak{R} + ..,$$

$$ABC..K - \frac{3}{n}\mathfrak{P} + \frac{3^2}{n^2}\mathfrak{Q} - \frac{3^3}{n^3}\mathfrak{R} + ..,$$

$$ABC..K - \frac{n}{n}\mathfrak{P} + \frac{n^2}{n^2}\mathfrak{Q} - \frac{n^3}{n^3}\mathfrak{R} + ...$$

Zieht man nun von jeder horizontalen Reihe die nächstfolgende ab, so erhält man die Zahl der in jedem Augenblick aufgelöseten Vereine, nach einander

$$\frac{1}{n}\mathfrak{P} - \frac{1}{n^2}\mathfrak{Q} + \frac{1}{n^3}\mathfrak{R} - \ldots,$$

$$\frac{2-1}{n}\mathfrak{P} - \frac{2^2-1}{n^2}\mathfrak{Q} + \frac{2^3-1}{n^3}\mathfrak{R} - \ldots,$$

$$\frac{3-2}{n}\mathfrak{P} - \frac{3^2-2^2}{n^2}\mathfrak{Q} + \frac{3^3-2^3}{n^3}\mathfrak{R} - \ldots,$$

$$\frac{n-(n-1)}{n}\mathfrak{P} - \frac{n^2-(n-1)^2}{n^2}\mathfrak{Q} + \frac{n^3-(n-1)^3}{n^3}\mathfrak{R} - \ldots$$

Discontirt man ferner die Zahlung jedes Augenblicks auf den Anfang des Jahrs, so erhält man den baaren Werth der Zahlungen des ersten Jahrs =

$$\frac{1}{n}\mathfrak{P}\left[\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{2-1}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{3-2}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots + \frac{n-(n-1)}{r^{\frac{n}{n}}}\right]$$

$$-\frac{1}{n^2}\mathfrak{Q}\left[\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{2^2-1}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{3^2-2^2}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots + \frac{n^2-(n-1)^2}{r^{\frac{n}{n}}}\right]$$

$$+\frac{1}{n^3}\mathfrak{R}\left[\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{2^3-1}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{3^3-2^3}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots + \frac{n^3-(n-1)^3}{r^{\frac{n}{n}}}\right]$$

$$\pm\frac{1}{n^m}\mathfrak{T}\left[\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{2^m-1}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{3^m-2^m}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots + \frac{n^m-(n-1)^m}{r^{\frac{n}{n}}}\right].$$

Der erste Theil ist $= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}\right)\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}\right.$

$+\frac{3}{r^n}+..+\frac{n}{r^n})\,\mathfrak{P}+\frac{1}{r^{n+1}}\mathfrak{P}$, und wenn $n=\infty$ gesetzt wird, $=(\frac{1}{\pi}\int\frac{x\,dx}{rx}+\frac{1}{r})\,\mathfrak{P}$; der zweite Theil wird $=$

$\frac{1}{n^2}(1-\frac{1}{r^n})(\frac{1}{r^n}+\frac{2^2}{r^n}+\frac{3^2}{r^n}+..+\frac{n^2}{r^n})\,\mathfrak{Q}+\frac{1}{r^{n+1}}\mathfrak{Q}$, und wenn n unendlich ist, $=$

$(\frac{1}{\pi}\int\frac{x^2\,dx}{rx}+\frac{1}{r})\,\mathfrak{Q}$; ferner ist der dritte Theil $=\frac{1}{n}(1-\frac{1}{r^n})(\frac{1}{r^n}+\frac{2^3}{r^n}+\frac{3^3}{r^n}+..+\frac{n^3}{r^n})\,\mathfrak{R}+\frac{1}{r^{n+1}}\mathfrak{R}$, und wenn wieder $n=\infty$ wird, $=(\frac{1}{\pi}\int\frac{x^3\,dx}{rx}+\frac{1}{r})\,\mathfrak{R}$, so wie der letzte Theil auf ähnliche Weise $=(\frac{1}{\pi}\int\frac{x^m\,dx}{rx}+\frac{1}{r})\,\mathfrak{T}$ wird. Wenn man nun jeden Theil nach §. 42 integrirt und dann $x=1$ setzt, so erhält man den baaren Werth der Zahlungen des ersten Jahrs $=\frac{\pi}{pr}\,\mathfrak{P}-$

$\frac{\pi}{pr}(2\pi - 2p)\,\mathfrak{Q} + \frac{\pi}{pr}(6\pi^2 - 3p - 6\pi p)\,\mathfrak{R} - \ldots$ Weil ferner $\mathfrak{P} - \mathfrak{Q} + \mathfrak{R} - \ldots \pm \mathfrak{T} = \Delta\,(ABC\ldots K)$ ist, so hat man auch den Werth der Zahlungen des ersten Jahrs $= \frac{\pi}{pr}\Delta(ABC..K) - \frac{\pi}{pr}(2\pi - 1 - 2p)\,\mathfrak{Q} + \frac{\pi}{pr}(6\pi^2 - 1 - 3p - 6\pi p)\,\mathfrak{R} - \ldots$ Wenn nun $\mathfrak{P}^1$, $\mathfrak{Q}^1$, $\mathfrak{R}^1$, $\mathfrak{T}^1$ für das zweite Jahr dasselbe bedeuten, was $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$ für das erste Jahr bezeichnen, so erhält man den baaren Werth der Zahlungen des zweiten Jahrs $= \frac{\pi}{pr}\frac{\Delta\,(A^1 B^1 C^1 \ldots K^1)}{r} - \frac{\pi}{pr}(2\pi - 1 - 2p)\,\frac{\mathfrak{Q}^1}{r} + \frac{\pi}{pr}(6\pi^2 - 1 - 3p - 6\pi p)\,\frac{\mathfrak{R}^1}{r} - \ldots$ etc.

Nimmt man aber die Zahlungen aller Jahre zusammen und dividirt mit ABC .. K, so wird der gesuchte gegenwärtige Werth der Summe $1 = \frac{\pi}{pr}\int\frac{\Delta\,(A'^{\circ}\,B'^{\circ}\,C'^{\circ}\ldots K'^{\circ}}{r^{\circ}\,ABC\ldots K}\frac{}{} - \frac{1}{ABC\ldots K}\cdot[\frac{\pi}{pr}(2\pi - 1 - 2p)\int\frac{\mathfrak{Q}'^{\circ}}{r^{\circ}} - \frac{\pi}{pr}(6\pi^2 - 1 - 3p - 6\pi p)\int\frac{\mathfrak{R}'^{\circ}}{r^{\circ}} + \ldots) = \frac{\pi}{p}\vartheta\,\overline{abc..k} - \frac{1}{ABC\ldots K}[\frac{\pi}{pr}(2\pi - 1 - 2p)\int\frac{\mathfrak{Q}^{\circ}}{r^{\circ}} - \frac{\pi}{pr}(6\pi^2 - 1 - 3p - 6\pi p)\int\frac{\mathfrak{R}^{\circ}}{r^{\circ}} + \ldots]$.

Von den angegebenen Coefficienten ist für den Zinsfufs von 4 Procent $\frac{\pi}{p} = 1{,}019868$, $\frac{\pi}{pr}(2\pi - 1 - 2p) = 0{,}006410$, $\frac{\pi}{pr}(6\pi^2 - 1 - 3p - 6\pi p) = 0{,}009604$ etc. Da nun auch $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ etc. gegen ABC .. K nur klein sind, indem in jedem Theil von $\mathfrak{Q}$ zwey, in jedem Theil von $\mathfrak{R}$ drey etc. Decremente als Factoren vorkommen, so kann man wohl in den meisten Fällen ohne beträchtlichen Fehler den vollständigen Werth der sofort bey der Auflösung der Verbindung zu zahlenden Summe $1 = 1{,}0198 \cdot \vartheta \overline{abc\,..\,k}$ oder $= 1{,}02 \cdot \vartheta \overline{abc\,..\,k}$ setzen.

Anm. Allgemein ist, mit Ausnahme des ersten Gliedes oder $\frac{\pi}{p} \vartheta \overline{abc\,..\,k}$, der Coefficient des mten Gliedes der angegebenen Reihe $= \pm \left(\frac{1}{\pi}\int \frac{x^m\,dx}{r^x} + \frac{1}{r} - \frac{\pi}{pr}\right)$. Da nun für $r = 1{,}04$, $\frac{\pi}{pr} = 0{,}980643$ und $\frac{1}{r} = 0{,}961538$, so wird der gedachte Coefficient $= \pm \left(\frac{1}{\pi}\int \frac{x^m\,dx}{r^x} - 0{,}019105\right)$, wo in $\int \frac{x^m\,dx}{r^x}$ nach der Integration $x = 1$ gesetzt werden mufs. Der Coefficient des Gliedes, worin $\mathfrak{P}$ multiplicirt ist, wird also $= \frac{1}{\pi}\int \frac{x\,dx}{r^x} - 0{,}019105 = 0$. Und

weil $\int \frac{x^z \, dx}{rx} = 0{,}523580$ (§. 246) und $\frac{1}{\pi} \int \frac{x^z dx}{rx} = 0{,}012698$, auch, wenn $x = 1$ ist, $\int \frac{x^m dx}{rx}$ um so kleiner wird, je gröfser m ist, so wird jeder Coefficient für sich, ohne Rücksicht auf das davorstehende Zeichen, verneint und kleiner als 0,019105.

§. 295.

Wenn ferner bey einer anfänglichen Verbindung von m Personen die Anwartschaft 1 bezahlt werden sollte bey dem Tode einer bestimmten Person A, im Fall sie *zuerst* unter den gegebenen Personen stirbt, und zwar am Ende des Sterbejahrs, so hat man auf ganze Jahre gerechnet den Werth dieser Summe $= \frac{\triangle A . B^1 C^1 \ldots F^1}{A B C \ldots F \, r} +$

$$\frac{\triangle A^1 . B^2 C^2 \ldots F^2}{A B C \ldots F \, r^2} + \ldots =$$

$$\frac{A^2 B^1 C^1 \ldots F^1}{A B C \ldots F \, r} + \frac{A^1 B^2 C^2 \ldots F^2}{A B C \ldots F \, r^2}$$

$$+ \ldots - \left(\frac{A^1 B^1 C^1 \ldots F^1}{A B C \ldots F \, r} + \right.$$

$$\left. \frac{A^2 B^2 C^2 \ldots F^2}{A B C \ldots F \, r^2} + \ldots \right) =$$

$$\frac{A^{-1}}{A} \lambda \overline{(a - 1) \, b \, c \ldots f} - \lambda \overline{a \, b \, c \ldots f}.$$

Soll hiebey auf augenblickliche Theile des Jahrs gerechnet, jedoch jede Anwartschaft erst am Ende

des Sterbejahrs bezahlt werden, so ist der baare Werth des xten Jahrs, wenn z die abgelaufene Zeit während desselben bedeutet, $= \frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{ABC \ldots F\, r^x} \times$

$\int (B^{\overline{x-1}} - z \Delta B^{\overline{x-1}})\,(C^{\overline{x-1}} - z \Delta C^{\overline{x-1}}) \ldots (F^{\overline{x-1}} - z \Delta F^{\overline{x-1}})\, dz$, woraus sich für jeden Fall der gesammte Werth finden läfst.

Wenn also unter dieser Voraufsetzung bey einer anfänglichen Verbindung unter drey Personen, der Werth der Anwartschaft gesucht wird, die bey dem Tode von A bezahlt werden soll, falls dann die beiden mitverbundenen Personen B und C noch leben, so ist dieser baare Werth für das xte Jahr $=$

$$\frac{\int \Delta A^{\overline{x-1}} (B^{\overline{x-1}} - z\Delta B^{\overline{x-1}})\,(C^{\overline{x-1}} - z\Delta C^{\overline{x-1}})\, dz}{A\,B\,C\; r^x}$$

$$= \frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{ABC\; r^x} [B^{\overline{x-1}} C^{\overline{x-1}} - \tfrac{1}{2}(B^{\overline{x-1}} \Delta C^{\overline{x-1}} + C^{\overline{x-1}} \Delta B^{\overline{x-1}}) + \tfrac{1}{3} \Delta B^{\overline{x-1}} \Delta C^{\overline{x-1}}]$$

. Setzt man $A^{\overline{x-1}} - A^{\overline{x}}$ anstatt $\Delta A^{\overline{x-1}}$, imgleichen $B^{\overline{x-1}} - B^{\overline{x}}$ anstatt $\Delta B^{\overline{x-1}}$ etc., so erhält man den Werth für alle Jahre $= \frac{1}{3}\int \frac{A^{\overline{x-1}}\, B^{\overline{x-1}}\, C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\; r^x}$

$$+\tfrac{1}{6}\int \frac{A^{\overline{x-1}}\, B^{\overline{x-1}}\, C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\; r^x} + \tfrac{1}{6}\int \frac{A^{\overline{x-1}}\, B^{\overline{x}}\, C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\; r^x}$$

$$+\tfrac{1}{3}\int \frac{A^{x-1}\,B^{x}\,C^{x}}{A\,B\,C\;rx} - \tfrac{1}{3}\int \frac{A^{x}\,B^{x-1}\,C^{x-1}}{A\,B\,C\;rx}$$

$$-\tfrac{1}{6}\int \frac{A^{x}\,B^{x-1}\,C^{x}}{A\,B\,C\;rx} - \tfrac{1}{6}\int \frac{A^{x}\,B^{x}\,C^{x-1}}{A\,B\,C\;rx^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\tfrac{1}{3}\int \frac{A^{x}\,B^{x}\,C^{x}}{A\,B\,C\;rx} = \frac{1}{3r}\,(1 + \lambda\,\overline{abc}) +$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{-1}\,B^{-1}}{A\,B}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} +$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{A^{-1}\,C^{-1}}{A\,C}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b\,(c-1)} +$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{A^{-1}}{A}\,\lambda\overline{(a-1)bc} - \tfrac{1}{3}\,\frac{B^{-1}\,C^{-1}}{B\,C}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,(c-1)} -$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{B^{-1}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,c} - \tfrac{1}{6}\,\frac{C^{-1}}{C}\,\lambda\,\overline{a\,b\,(c-1)} -$$

$$\tfrac{1}{3}\,\lambda\,\overline{abc}.$$

Der erste und letzte Theil sind zusammen $=$

$$\frac{1}{3r} - \frac{(r-1)\,\lambda\,\overline{abc}}{3\,r} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda\,\overline{abc}}{p\,r}\right) = \tfrac{1}{3}\,\vartheta\,\overline{abc}.$$

Berechnet man nun den Werth der Anwartschaft auf den Fall, dafs B zuerst stirbt, so wie auf den Fall, dafs C zuerst stirbt, und nimmt alle drey Werthe zusammen, so heben sich alle Glieder bis auf $\frac{1}{3}\,\vartheta\,\overline{abc}$ jedes einzelnen

Werths auf, und man erhält alle drey Werthe zusammen $= \vartheta\,\overline{\overline{abc}}$ nach §. 293.

Käme aufser den vorigen noch die vierte Person D hinzu, und würde wieder der Werth der Summe auf den Fall, dafs A zuerst stürbe, gesucht, so erhielte man denselben durch eine ähnliche Berechnuug

$$= \tfrac{1}{4}\,\frac{A^{-1}\,B^{-1}\,C^{-1}\,D^{-1}}{A\;B\;C\;D} \times \overline{\lambda\,(a-1)\;(b-1)\;(c-1)\;(d-1)}$$

$$+ \tfrac{1}{12}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A^{-1}B^{-1}C^{-1}}{A\;B\;C}\;\overline{\lambda\,(a-1)(b-1)(c-1)d} \\ \dfrac{A^{-1}B^{-1}D^{-1}}{A\;B\;D}\;\overline{\lambda\,(a-1)(b-1)\,c\,(d-1)} \\ \dfrac{A^{-1}C^{-1}D^{-1}}{A\;C\;D}\;\overline{\lambda\,(a-1)\,b\,(c-1)(d-1)} \end{array}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{12}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A^{-1}\;B^{-1}}{A\;B}\;\overline{\lambda\,(a-1)\;(b-1)\;cd} \\ \dfrac{A^{-1}\;C^{-1}}{A\;C}\;\overline{\lambda\,(a-1)\;b\;(c-1)\,d} \\ \dfrac{A^{-1}\;D^{-1}}{A\;D}\;\overline{\lambda\,(a-1)\;bc\;(d-1)} \end{array}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\,\frac{A^{-1}}{A}\,\overline{\lambda\,(a-1)\;bcd} - \tfrac{1}{4}\,\frac{B^{-1}\,C^{-1}\,D^{-1}}{B\;C\;D} \times$$

$$\lambda\, \overline{a\,(b-1)\,(c-1)\,(d-1)} -$$

$$\tfrac{1}{12}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{B^{-1}\,C^{-1}}{B\;C}\;\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,(c-1)\,d} \\ \dfrac{B^{-1}\,D^{-1}}{B\;D}\;\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,c\,(d-1)} \\ \dfrac{C^{-1}\,D^{-1}}{C\;D}\;\lambda\,\overline{a\,b\,(c-1)\,(d-1)} \end{array}\right\}$$

$$-\tfrac{1}{12}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{B^{-1}}{B}\;\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,c\,d} \\ \dfrac{C^{-1}}{C}\;\lambda\,\overline{a\,b\,(c-1)\,d} \\ \dfrac{D^{-1}}{D}\;\lambda\,\overline{a\,b\,c\,(d-1)} \end{array}\right\}$$

$$-\tfrac{1}{4}\,\lambda\,\overline{abcd}.$$

Uebrigens ist hier der erste Theil, oder

$$\tfrac{1}{4}\,\frac{A^{-1}\,B^{-1}\,C^{-1}\,D^{-1}}{A\;B\;C\;D}\;\times$$

$$\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,(c-1)\,(d-1)} =$$

$$\frac{1}{4},\ \frac{1\,\dagger\,\lambda\,\overline{abcd}}{r},$$ folglich sind der erste

und letzte Theil zusammengenommen wieder $=$

$$\frac{1 + \lambda\,\overline{abcd}}{4r} - \frac{\lambda\,\overline{abcd}}{4} =$$

$$\frac{1 - (r-1)\,\lambda\,\overline{abcd}}{4r} = \tfrac{1}{4}\,\vartheta\,\overline{abcd}.$$

Anm. Man kann die im gegenwärtigen §. angegebenen vollständigen Werthe noch auf eine kürzere Art erhalten, wenn man in der Formel $f\,\frac{\Delta A^{n-1}}{A r^n} \cdot \frac{B^n\,C^n\,D^n}{B\,C\,D}$, anstatt $B^n\,C^n\,D^n$, den vollständigen Werth der Coexistenz nach §. 209 b. und 245 b. setzt. Sind z. B. der mit A verbundenen Personen nur zwey, B und C, so ist nämlich dieser vollständige Werth $= \frac{1}{3}B^{n-1}\,C^{n-1} + \frac{1}{6}(B^{n-1}\,C^n + B^n\,C^{n-1}) + \frac{1}{3}B^n\,C^n$. Man erhält also den Werth der Anwartschaft für das nte Jahr $=$

$$\frac{A^{n-1}}{Ar^n} \cdot \frac{\frac{1}{3}B^{n-1}\,C^{n-1} + \frac{1}{6}B^{n-1}\,C^n + \frac{1}{6}B^n\,C^{n-1} + \frac{1}{3}B^n\,C^n}{B\,C}$$

$$- \frac{A^n}{Ar^n} \cdot \frac{\frac{1}{3}B^{n-1}\,C^{n-1} + \frac{1}{6}B^{n-1}\,C^n + \frac{1}{6}B^n\,C^{n-1} + \frac{1}{3}B^n\,C^n}{B\,C}$$

woraus sich der obige Ausdruck ergiebt.

§. 296.

Sollte die Summe 1 bezahlt werden am Ende des Sterbejahrs von A unter der Bedingung, dafs er *zuletzt stürbe*, so erhält man, wenn der Ausdruck für die Zahl der unter den übrigen Personen B, C

und D im Anfange des xten Jahrs ganz ausgestorbenen Verbindungen aus §. 199 genommen wird, für das xte Jahr den Werth der Zahlung an diejenigen A, welche nach dem Tode aller übrigen Interessenten sterben, auf ganze Jahre gerechnet, =

$$\frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{A r^x} \cdot \left[1 - \left(\frac{B^{\overline{x-1}}}{B} + \frac{C^{\overline{x-1}}}{C} + \frac{D^{\overline{x-1}}}{D} \right) + \frac{B^{\overline{x-1}}\, C^{\overline{x-1}}}{B\, C} + \frac{B^{\overline{x-1}}\, D^{\overline{x-1}}}{B\, D} + \frac{C^{\overline{x-1}}\, D^{\overline{x-1}}}{C\, D} \right) - \frac{B^{\overline{x-1}}\, C^{\overline{x-1}}\, D^{\overline{x-1}}}{B\, C\, D} + \ldots \right].$$

Daraus ergiebt sich, durch Zusammenlegung der Zahlungen aller Jahre, der gesuchte Werth der Anwartschaft =

$$\frac{A^{\overline{-1}}}{A} \lambda (a - 1) -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A^{\overline{-1}}\, B^{\overline{-1}}}{A\, B} \lambda \overline{(a-1)\,(b-1)} \\ \frac{A^{\overline{-1}}\, C^{\overline{-1}}}{A\, C} \lambda \overline{(a-1)\,(c-1)} \\ \frac{A^{\overline{-1}}\, D^{\overline{-1}}}{A\, D} \lambda \overline{(a-1)\,(d-1)} \end{array} \right\} +$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{A^{-1}B^{-1}C^{-1}}{A\ B\ C}\ \lambda\overline{(a-1)\ (b-1)\ (c-1)} \\ \frac{A^{-1}B^{-1}D^{-1}}{A\ B\ D}\ \lambda\overline{(a-1)\ (b-1)\ (d-1)} \\ \frac{A^{-1}C^{-1}D^{-1}}{A\ C\ D}\ \lambda\overline{(a-1)\ (c-1)\ (d-1)} \end{array}\right\} -$$

$$\frac{A^{-1}\ B^{-1}\ C^{-1}\ D^{-1}}{A\ B\ C\ D} \times$$

$$\lambda\overline{(a-1)\ (b-1)\ (c-1)\ (d-1)} - \lambda a$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{B^{-1}}{B}\ \lambda\overline{a\ (b-1)} \\ \frac{C^{-1}}{C}\ \lambda\overline{a\ (c-1)} \\ \frac{D^{-1}}{D}\ \lambda\overline{a\ (d-1)} \end{array}\right\} -$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{B^{-1}C^{-1}}{B\ C}\ \lambda\overline{a\ (b-1)\ (c-1)} \\ \frac{B^{-1}D^{-1}}{B\ D}\ \lambda\overline{a\ (b-1)\ (d-1)} \\ \frac{C^{-1}D^{-1}}{C\ C}\ \lambda\overline{a\ (c-1)\ (d-1)} \end{array}\right\} +$$

$$\frac{B^{-1}\ C^{-1}\ D^{-1}}{B\ C\ D}\ \lambda\overline{a\ (b-1)\ (c-1)\ (d-1)}.$$

Soll aber auf augenblickliche Theile des Jahrs gerechnet werden, jedoch so, dafs die Zahlung erst am Ende des Jahrs geschieht, so ist der gegenwärtige Werth für irgend ein xtes Jahr, wenn z die verflofsene Zeit bezeichnet, =

$$\frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{A r^x} \int [1 - \frac{B^{\overline{x-1}} - z \Delta B^{\overline{x-1}}}{B} - \frac{C^{\overline{x-1}} - z \Delta C^{\overline{x-1}}}{C} - \frac{D^{\overline{x-1}} - z \Delta D^{\overline{x-1}}}{D} + \frac{(B^{\overline{x-1}} - z \Delta B^{\overline{x-1}})(C^{\overline{x-1}} - z \Delta C^{\overline{x-1}})}{B C} + ..] dz,$$

woraus sich wieder der Werth für jeden Fall herleiten läfst.

Sind z. B. drey Personen, A, B und C, gegeben und soll die Summe 1 bezahlt werden, wenn A zuletzt stirbt, so erhält man aus dem Werthe des einen Jahrs, nämlich $\frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{A r^x} \int [1 - \frac{B^{\overline{x-1}} - z \Delta B^{\overline{x-1}}}{B} - \frac{C^{\overline{x-1}} - z \Delta C^{\overline{x-1}}}{C} + \frac{(B^{\overline{x-1}} - z \Delta B^{\overline{x-1}})(C^{\overline{x-1}} - z \Delta C^{\overline{x-1}})}{B C}] dz$, den gesammten Werth $= \int \frac{A^{\overline{x-1}}}{A r^x} - \frac{1}{2}(\int \frac{A^{\overline{x-1}} B^{\overline{x-1}}}{A B r^x} + \int \frac{A^{\overline{x-1}} C^{\overline{x-1}}}{A C r^x}) - \frac{1}{2}(\int \frac{A^{\overline{x-1}} B^{\overline{x}}}{A B r} + \int \frac{A^{\overline{x-1}} C^{\overline{x}}}{A C r^x})$

$$+\tfrac{x}{3}\int\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\;rx}+$$

$$\tfrac{x}{6}\left(\int\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\;rx}+\int\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\;rx}\right).$$

$$+\tfrac{x}{2}\int\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\;rx}-\int\frac{A^{\overline{x}}}{A\;rx}+$$

$$\tfrac{x}{2}\left(\int\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x-1}}}{A\,B\;rx}+\int\frac{A^{\overline{x}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,C\;rx}\right)+$$

$$\tfrac{x}{2}\left(\int\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}}{A\,B\;rx}+\int\frac{A^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{A\,C\;rx}\right)-$$

$$\tfrac{x}{3}\int\frac{A^{\overline{x}}B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\;rx}-\tfrac{x}{6}\left(\int\frac{A^{\overline{x}}B^{\overline{x-1}}C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\;rx}\right.$$

$$\left.+\int\frac{A^{\overline{x}}B^{\overline{x}}C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\;rx}\right)-\tfrac{x}{3}\int\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\;rx}$$

$$=\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\,(a-1)-\tfrac{1}{2}\left[\frac{A^{\overline{-1}}\,B^{\overline{-1}}}{A\,B}\times\right.$$

$$\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)}+\frac{A^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{A\,C}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(c-1)}\left.\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b}+\right.$$

$$\left.\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,c}\right]+$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{A^{\overline{-1}}\,B^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{A\,B\,C}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}$$

$$+\tfrac{1}{6}\left[\frac{A^{\overline{-1}}\,B^{\overline{-1}}}{A\,B}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,c}+\right.$$

$$\frac{A^{-1}\ C^{-1}}{A\ C}\ \lambda\ \overline{(a-1)\ b\ (c-1)}\ ] +$$

$$\tfrac{1}{3}\ \frac{A^{-1}}{A}\ \lambda\ \overline{(a-1)\ b\ c} - \lambda\ a +$$

$$\tfrac{1}{2}\ [\ \frac{B^{-1}}{B}\ \lambda\ \overline{a\ (b-1)} + \frac{C^{-1}}{C}\ \times$$

$$\lambda\ \overline{a\ (c-1)}\ ] + \tfrac{1}{2}\ (\lambda\ \overline{a\ b} + \lambda\ \overline{a\ c}) -$$

$$\tfrac{1}{3}\ \frac{B^{-1}\ C^{-1}}{B\ C}\ \lambda\ \overline{a\ (b-1)\ (c-1)} -$$

$$\tfrac{1}{6}\ [\ \frac{B^{-1}}{B}\ \lambda\ \overline{a\ (b-1)\ c} + \frac{C^{-1}}{C}\ \times$$

$$\lambda\ \overline{a\ b\ (c-1)}\ ] - \tfrac{1}{3}\ \lambda\ \overline{a\ b\ c}.$$ Da nun

$$\frac{A^{-1}}{A}\ \lambda\ (a-1) = \frac{1}{r} + \frac{\lambda a}{r},$$ ferner

$$\frac{A^{-1}\ B^{-1}}{A\ B}\ \lambda\ \overline{(a-1)\ (b-1)} = \frac{1}{r} + \frac{\lambda\ (ab)}{r}$$

so wie $$\frac{A^{-1}\ C^{-1}}{A\ C}\ \lambda\ \overline{(a-1)\ (c-1)} =$$

$$\frac{1}{r} + \frac{\lambda\ (a\ c)}{r},$$ imgleichen $$\frac{A^{-1}\ B^{-1}\ C^{-1}}{A\ B\ C}\ \times$$

$$\lambda\ \overline{(a-1)\ (b-1)\ (c-1)} = \frac{1}{r} +$$

$$\frac{\lambda\ (a\ b\ c)}{r},$$ so hat man den angegebenen

Werth auch $$= \frac{1}{3\,r} - \frac{1}{pr}\ [\lambda\ a - \tfrac{1}{2}\ (\lambda\ \overline{a\ b} +$$

$$\lambda\ \overline{a\ c}) + \tfrac{1}{3}\ \lambda\ \overline{a\ b\ c}] - \frac{A^{-1}}{2\ A}\ [\lambda\ \overline{(a-1)\ b} +$$

$$\lambda\overline{(a-1)\,c}\,] + \frac{B^{-1}}{2\,B}\,\lambda\overline{a\,(b-1)} +$$
$$\frac{C^{-1}}{2\,C}\,\lambda\overline{a\,(c-1)} + \frac{A^{-1}}{6\,A}\,[\frac{B^{-1}}{B}\,\times$$
$$\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} + \frac{C^{-1}}{C}\,\lambda\overline{(a-1)\,b\,(c-1)}\,]$$
$$+ \frac{A^{-1}}{3\,A}\,\lambda\overline{(a-1)\,b\,c} -$$
$$\frac{B^{-1}\;C^{-1}}{3\,B\,C}\,\lambda\overline{a\,(b-1)\,(c-1)} -$$
$$\frac{B^{-1}}{6\,B}\,\lambda\overline{a\,(b-1)\,c} -$$
$$\frac{C^{-1}}{6\,C}\,\lambda\overline{a\,b\,(c-1)}.$$

Berechnet man den Werth der Summe 1, wenn sie bey dem Tode von B und von C zahlbar ist, falls diese zuletzt sterben, und nimmt alle drey Werthe zusammen, so heben sich alle Theile, welche in die um 1 Jahr zurückberechneten Zahlen der Lebenden multiplicirt sind, auf, und es bleiben nur

$$\frac{1}{3\,r} - \frac{1}{pr}\,[\lambda a - \tfrac{1}{2}\,(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac}) + \tfrac{1}{3}\,\lambda\overline{abc}]$$
$$+ \frac{1}{3\,r} - \frac{1}{pr}\,[\lambda b - \tfrac{1}{2}\,(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{bc}) + \tfrac{1}{3}\,\lambda\overline{abc}]$$
$$+ \frac{1}{3\,r} - \frac{1}{pr}\,[\lambda c - \tfrac{1}{2}\,(\lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \tfrac{1}{3}\,\lambda\overline{abc}]$$

die zusammengenommen $= \frac{1}{r} - \frac{1}{pr}\,[\lambda a + \lambda b + \lambda c - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \lambda\overline{abc}]$ sind. (Vergl. §. 301 weiter unten).

Anm. Auch hier kann man wieder die angeführten vollständigen Werthe erhalten, wenn man in dem Ausdrucke, worin $\frac{\Delta A^{n-1}}{A\ rn}$ multiplicirt ist, nämlich $1-(\frac{B^{n-1}}{B}+\frac{C^{n-1}}{C}+\frac{D^{n-1}}{D})+(\frac{B^{n-1}\ C^{n-1}}{B\ C}+\frac{B^{n-1}\ D^{n-1}}{B\ D}+\frac{C^{n-1}\ D^{n-1}}{C\ D})-\frac{B^{n-1}\ C^{n-1}\ D^{n-1}}{B\ C\ D}$, durchgängig die vollständigen Werthe nach §. 209. b., nämlich $\frac{1}{2}(B^{n-1}+B^{n})$ anstatt B^{n-1} etc., $\frac{1}{3}B^{n-1}\ C^{n-1}+\frac{1}{6}(B^{n-1}\ C^{n}+B^{n}\ C^{n-1})+\frac{1}{3}B^{n}\ C^{n}$ anstatt $B^{n-1}C^{n-1}$ etc. setzt.

§. 297.

Sollte die Anwartschaft 1 bey dem Tode von A bezahlt werden, falls dann *einige Personen* des Vereins, z. B. B und C, *schon verstorben wären*, *andre aber*, z. B. D und F, *noch lebten*, so wäre der allgemeine Ausdruck für den Werth der Anwartschaft, auf ganze Jahre gerechnet,

$$\int\frac{\Delta A^{x-1}(B-B^{x-1})(C-C^{x-1})D^{x}F^{x}}{r^{x}\ A\ B\ C\ D\ F}$$
$$=\int\frac{A^{x-1}\ D^{x}\ F^{x}}{r^{x}\ A\ D\ F}-\int\frac{A^{x-1}B^{x-1}\ D^{x}F^{x}}{r^{x}\ A\ B\ D\ F}$$
$$-\int\frac{A^{x-1}\ C^{x-1}\ D^{x}\ F^{x}}{r^{x}\ A\ C\ D\ F}+$$

$$\int \frac{A^{x-1}\, B^{x-1}\, C^{x-1}\, D^{x}\, F^{x}}{rx\ A\ B\ C\ D\ F} -$$

$$\int \frac{A^{x}\, D^{x}\, F^{x}}{rx\ A\ D\ F} + \int \frac{A^{x}\, B^{x-1}\, D^{x}\, F^{x}}{rx\ A\ B\ D\ F} +$$

$$\int \frac{A^{x}\, C^{x-1}\, D^{x}\, F^{x}}{rx\ A\ C\ D\ F} - \int \frac{A^{x}\, B^{x-1}\, C^{x-1}\, D^{x}\, F^{x}}{rx\ A\ B\ C\ D\ F}.$$

Hieraus erhält man also den Werth der Anwartschaft

$$= \frac{A^{-1}}{A} \lambda\,(a-1)\,df -$$

$$\frac{A^{-1}\, B^{-1}}{A\ B} \lambda\,(a-1)\,(b-1)\,df$$

$$- \frac{A^{-1}\, C^{-1}}{A\ C} \lambda\,(a-1)\,(c-1)\,df$$

$$+ \frac{A^{-1}\, B^{-1}\, C^{-1}}{A\ B\ C} \lambda\,(a-1)\,(b-1)\,(c-1)\,df$$

$$- \lambda\, a\, df + \frac{B^{-1}}{B} \lambda\, a\,(b-1)\,df$$

$$+ \frac{C^{-1}}{C} \lambda\, a\,(c-1)\,df -$$

$$\frac{B^{-1}\, C^{-1}}{B\ C} \lambda\, a\,(b-1)\,(c-1)\,df.$$

Sollen auch die Theile des Jahrs mitgerechnet, die Anwartschaften jedoch am Ende des Sterbejahrs bezahlt werden, ist ferner unter einer Verbindung von drey Personen die Anwartschaft bey dem Tode von A fällig, wenn B schon gestorben ist und C noch lebt, so hat man den gegenwärtigen Werth

der Zahlung des xten Jahrs $= \frac{\Delta A^{x-1}}{A\, r^x} \times \int [\frac{(B - B^{x-1} + z\,\Delta B^{x-1})\,(C^{x-1} - z\,\Delta C^{x-1})}{B \qquad\qquad C}]\, dz.$

Hieraus findet man, wenn nach der Integration $z = 1$, imgleichen $A^{x-1} - A^{x}$ anstatt ΔA^{x-1}, so wie $B^{x-1} - B^{x}$ anstatt ΔB^{x-1} etc. gesetzt wird, den gegenwärtigen Werth der Zahlung für das gegebene Jahr $= \frac{1}{2} \frac{A^{x-1}\, C^{x-1}}{A\, C\, r^x} +$

$\frac{1}{2} \frac{A^{x-1}\, C^{x}}{A\, C\, r^x} - \frac{1}{3} \frac{A^{x-1}\, B^{x-1}\, C^{x-1}}{A\, B\, C\, r^x} -$

$\frac{1}{6} \frac{A^{x-1}\, B^{x-1}\, C^{x}}{A\, B\, C\, r^x} - \frac{1}{6} \frac{A^{x-1}\, B^{x}\, C^{x-1}}{A\, B\, C\, r^x} -$

$\frac{1}{3} \frac{A^{x-1}\, B^{x}\, C^{x}}{A\, B\, C\, r^x} - \frac{1}{2} \frac{A^{x}\, C^{x-1}}{A\, C\, r^x} -$

$\frac{1}{2} \frac{A^{x}\, C^{x}}{A\, C\, r^x} + \frac{1}{3} \frac{A^{x}\, B^{x-1}\, C^{x-1}}{A\, B\, C\, r^x} +$

$\frac{1}{6} \frac{A^{x}\, B^{x-1}\, C^{x}}{A\, B\, C\, r^x} + \frac{1}{6} \frac{A^{x}\, B^{x}\, C^{x-1}}{A\, B\, C\, r^x} +$

$\frac{1}{3} \frac{A^{x}\, B^{x}\, C^{x}}{A\, B\, C\, r^x}$. Für alle Jahre ist also der

Werth $= \frac{1}{2} \frac{A^{-1}\, C^{-1}}{A\, C} \lambda\, \overline{(a-1)\,(c-1)}$

$+ \frac{1}{2} \frac{A^{-1}}{A} \lambda\, \overline{(a-1)\, c} -$

$$\frac{1}{2}\,\frac{A^{-1}B^{-1}C^{-1}}{A\,B\,C}\,\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{A^{-1}\;B^{-1}}{A\;B}\,\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,c}$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{A^{-1}\;C^{-1}}{A\;C}\,\lambda\overline{(a-1)\,b\,(c-1)}$$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{A^{-1}}{A}\,\lambda\overline{(a-1)\,b\,c}\;-$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{C^{-1}}{C}\,\lambda\overline{a\,(c-1)}-\frac{1}{2}\,\lambda\overline{ac}\;+$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{B^{-1}\;C^{-1}}{B\;C}\,\lambda\overline{a\,(b-1)\,(c-1)}$$

$$+\frac{1}{6}\,\frac{B^{-1}}{B}\,\lambda\overline{a\,(b-1)\,c}\;+$$

$$\frac{1}{6}\,\frac{C^{-1}}{C}\,\lambda\overline{a\,b\,(c-1)}+\frac{1}{3}\,\lambda\overline{a\,b\,c}=$$

$$\frac{1}{6r}-\frac{1}{pr}\left[\frac{\lambda\overline{ac}}{2}-\frac{\lambda\overline{a\,b\,c}}{3}\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{A^{-1}}{A}\,\lambda\overline{(a-1)\,c}\;-\right.$$

$$\left.\frac{C^{-1}}{C}\,\lambda\overline{a\,(c-1)}\right]\;-$$

$$\frac{1}{6}\left[\frac{A^{-1}\;B^{-1}}{A\;B}\,\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,c}\right.$$

$$\left.+\frac{A^{-1}\;C^{-1}}{A\;C}\,\lambda\overline{(a-1)\,b\,(c-1)}\right.$$

$$- \frac{B^{-1}}{B} \lambda\, a\,(b-1)\,c \; - \frac{C^{-1}}{C} \lambda\, a\,b\,(c-1)\,] - \tfrac{1}{3}\,[\frac{A^{-1}}{A} \times \lambda\,(a-1)\,b\,c - \frac{B^{-1}C^{-1}}{B\;C} \lambda\, a\,(b-1)\,(c-1)\,].$$

Sollte die Anwartschaft zahlbar seyn bey dem Tode von A, wenn C vorher gestorben wäre und B noch lebte, so wäre der Werth =

$$\frac{1}{6r} - \frac{1}{pr}\,[\frac{\lambda\, a\,b}{2} - \frac{\lambda\, a\,b\,c}{3}] + \tfrac{1}{2}\,[\frac{A^{-1}}{A} \lambda\,(a-1)\,b - \frac{B^{-1}}{B} \lambda\, a\,(b-1)\,] -$$

$$\tfrac{1}{6}\,[\frac{A^{-1}\;B^{-1}}{A\;B} \lambda\,(a-1)\,(b-1)\,c + \frac{A^{-1}\;C^{-1}}{A\;C} \lambda\,(a-1)\,b\,(c-1) - \frac{B^{-1}}{B} \lambda\, a\,(b-1)\,c - \frac{C^{-1}}{C} \lambda\, a\,b\,(c-1)\,] -$$

$$\tfrac{1}{3}\,[\frac{A^{-1}}{A} \lambda\,(a-1)\,b\,c - \frac{B^{-1}\;C^{-1}}{B\;C} \lambda\, a\,(b-1)\,(c-1)\,].$$

Nimmt man beide Werthe zusammen, so erhält man für den Fall, dafs *A überhaupt der zweite im Sterben seyn* sollte, die Anwartschaft =

$$\frac{1}{3r} - \frac{1}{pr}\left[\frac{\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac}}{2} - \frac{2\lambda\overline{abc}}{3}\right]$$

$$+\tfrac{1}{2}\Big[\frac{A^{-1}}{A}\lambda\overline{(a-1)\,b} +$$

$$\frac{A^{-1}}{A}\lambda\overline{(a-1)\,c} -$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\lambda\overline{a\,(c-1)} -$$

$$\frac{B^{-1}}{B}\lambda\overline{a\,(b-1)}\Big] -$$

$$\tfrac{1}{3}\Big[\frac{A^{-1}\,B^{-1}}{A\;B}\lambda\overline{(a-1)\;(b-1)\;c}$$

$$+\frac{A^{-1}\,C^{-1}}{A\;C}\lambda\overline{(a-1)\;b\;(c-1)}$$

$$-\frac{B^{-1}}{B}\lambda\overline{a\,(b-1)\,c} -$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\lambda\overline{a\,b\,(c-1)}\Big] -$$

$$\tfrac{2}{3}\Big[\frac{A^{-1}}{A}\lambda\overline{(a-1)\,b\,c} -$$

$$\frac{B^{-1}\,C^{-1}}{B\;C}\lambda\overline{a\,(b-1)\;(c-1)}\Big].$$

Sucht man weiter den Werth der Anwartschaft auch für B und C für den Fall, dafs sie die mittle-

ren im Sterben sind, und nimmt alle drey Werthe zusammen, so heben sich alle Glieder, die mit den um ein Jahr zurückgerechneten Zahlen der Lebenden multiplicirt sind, auf, und man erhält die Summe der drey Werthe =

$$\frac{1}{3r} - \frac{1}{pr}\left[\frac{\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac}}{2} - \frac{2\,\lambda\,\overline{abc}}{3}\right] +$$

$$\frac{1}{3r} - \frac{1}{pr}\left[\frac{\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{bc}}{2} - \frac{2\,\lambda\,\overline{abc}}{3}\right] +$$

$$\frac{1}{3r} - \frac{1}{pr}\left[\frac{\lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{bc}}{2} - \frac{2\,\lambda\,\overline{abc}}{3}\right] =$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{pr}\left[\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{bc} - 2\,\lambda\,\overline{abc}\right],$$

wo $\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{bc} - 2\,\lambda\,\overline{abc}$ die Rente für die längste Verbindung nach zwey unter den drey Personen A B C ist. (§. 279).

Würde dagegen der Werth der Anwartschaft genommen auf den Fall, dafs A nach B stirbt und C lebt, imgleichen auf den Fall, dafs B nach A stirbt und C lebt, so erhielte man den Werth der Anwartschaft 1 zahlbar bey dem Tode *derLängstlebenden unter den beiden Personen* A und B, wenn C dann noch lebt, =

$$\frac{1}{3r} - \frac{1}{pr}\left[\frac{\lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{bc}}{2} - \frac{2\,\lambda\,\overline{abc}}{3}\right] +$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{A^{-1}}{A} - \lambda\,\overline{(a-1)\,c} + \right.$$

$$\left.\frac{B^{-1}}{B} - \lambda\,\overline{(b-1)\,c} -\right.$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\ \lambda\,\overline{a\,(c-1)}\ -$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\ \lambda\,\overline{b\,(c-1)}\ ]\ -$$

$$\tfrac{1}{2}\ [\ \frac{A^{-1}\ B^{-1}}{A\ B}\ \lambda\,\overline{(a-1)\ (b-1)\ c}$$

$$-\ \frac{C^{-1}}{C}\ \lambda\,\overline{a\ b\ (c-1)}\ ]\ +$$

$$\tfrac{1}{6}\ [\ \frac{A^{-1}\ C^{-1}}{A\ C}\ \lambda\,\overline{(a-1)\ b\ (c-1)}$$

$$+\ \frac{B^{-1}\ C^{-1}}{B\ C}\ \lambda\,\overline{a\ (b-1)\ (c-1)}$$

$$-\ \frac{A^{-1}}{A}\ \lambda\,\overline{(a-1)\ b\ c}\ -$$

$$\frac{B^{-1}}{B}\ \lambda\,\overline{a\,(b-1)\ c}\ ].$$

Anm. Hier kann man wieder den vollständigen Werth der Erbschaft nach dem Tode von A auf eine kürzere Weise dadurch erhalten, dafs man in den einzelnen Theilen des auf ganze Jahre bestimmten Werths, so wie sie im Anfange des §. angegeben sind, anstatt der im Zähler dieser Brüche in A^{x-1} oder A^{x} multiplicirten nach vollen Jahren angesetzten Zahlen der Lebenden oder Verbindungen, die vollständigen Werthe der Existenzen nach §. 209 b. nimmt. So ist z. B., wenn drey Personen verbunden sind, und die Anwartschaft bezahlt werden soll bey dem Tode von A, wenn B schon gestorben ist und C noch lebt, der Werth auf ganze

$$\text{Jahre} = \int \frac{\Delta\, A^{n-1}}{A\ rn}\ \frac{(B\ -\ B^{n-1})\ C^{n}}{B\ C}\ =$$

$$\int \frac{A^{n-1}\, C^{n}}{rn\ A\ C} - \int \frac{A^{n-1}\, B^{n-1}\, C^{n}}{rn\ A\ B\ C} - \int \frac{A^{n}\, C^{n}}{rn\ A\ C} + \int \frac{A^{n}\, B^{n-1}\, C^{n}}{rn\ A\ B\ C}.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}(C^{n-1} + C^{n})$ anstatt C^{n}, imgleichen $\frac{1}{3} B^{n-1} C^{n-1} + \frac{1}{6}(B^{n-1} C^{n} + B^{n} C^{n-1}) + \frac{1}{3} B^{n} C^{n}$ anstatt $B^{n-1} C^{n}$, so erhält man den vollständigen Werth dieser Anwartschaft, so wie er in diesem §. angegeben worden.

§. 298.

Durch Zusammenlegung der in den §. §. 295 bis 297 gefundenen Werthe lafsen sich noch viele Aufgaben auflösen. So erhält man z. B. allein in Beziehung auf drey Personen

1) den Werth der Anwartschaft, zahlbar bey dem Tode einer bestimmten Person, wenn sie die *erste oder zweite* im Sterben ist, durch Zusammenlegung der in den §. §. 295 und 297 angegebenen Werthe,

2) den Werth der Anwartschaft bey dem Tode einer bestimmten Person, wenn sie die *erste oder letzte* im Sterben ist (§. 295 und 296),

3) die Anwartschaft, fällig bey dem Tode einer bestimmten Person, wenn sie die *zweite oder letzte* im Sterben ist (§. 296 und 297),

4) die Anwartschaft zahlbar bey dem Tode *einer von zwey* bestimmten Personen, die *zuerst* unter den dreien stirbt, durch Zusammenlegung der Anwartschaft bey dem Tode von A wenn er zuerst stirbt, und von B wenn er zuerst stirbt, (§. 295),

5) die Anwartschaft fällig bey dem Tode *einer von zwey* bestimmten Personen, welche die *mittlere* im Sterben ist, durch Addirung der auf den bestimmten Fall zahlbaren Summen bey dem Tode von A und von B, nach §. 297,

6) die Anwartschaft zahlbar bey dem Tode *einer von zwey* bestimmten Personen, welche *zuletzt* unter den dreien stirbt, durch Zusammenlegung dieser Werthe auf den bestimmten Tod von A und von B, nach (§. 296),

7) die Anwartschaft zahlbar bey dem Tode der *längstlebenden* von zwey bestimmten Personen, wenn alsdann die dritte Person noch lebt, (Siehe den Schlufs des §. 297),

8) die Anwartschaft fällig bey dem Tode *jeder* der drey Personen, die *zuerst* stirbt, d. h. bey Auflösung der Verbindung zu dreien, (§. 295 am Schlufs),

9) die Anwartschaft zahlbar bey dem Tode *jeder* der drey Personen, welche die *zweite* im Sterben ist, durch Berechnung der Werthe für alle drey Personen nach §. 297,

10) die Anwartschaft zahlbar bey dem Tode *jeder* der drey Personen, die *zuletzt* stirbt, d. h. bey dem Tode des Längstlebenden unter den dreien, durch Zusammenlegung der Werthe für alle drey Personen nach §. 296.

Anm. Morgan hat in seinen Principles fast alle diese Fälle umständlich demonstrirt. Die Auflösung folgt indefsen unmittelbar aus den angezogenen §. §. 295 bis 297. Die hier noch folgenden Aufgaben sind nicht füglich nach den in den erwähnten §. §. vorgetragenen Sätzen zu beantworten.

§. 299.

Man sucht den Werth einer Anwartschaft, zahlbar am Ende des Sterbejahrs von A, falls dann irgend eine der Personen B, C, D noch lebt (z. B. den Werth eines mehreren Kindern nach dem Tode des Vaters zufallenden Erbes). Die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des xten Jahrs von den Personen B, C, D noch irgend eine lebe, ist $=$

$$\frac{B^{\overline{x}}}{B} + \frac{C^{\overline{x}}}{C} + \frac{D^{\overline{x}}}{D} - \left(\frac{B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{B\,C} + \frac{B^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{B\,D} + \frac{C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{C\,D}\right) + \frac{B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{B\,C\,D},$$

und durch Multiplication dieses Ausdrucks mit $\frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{A}$ erhält man die Wahrscheinlichkeit, dafs A im xten Jahre stirbt, von den übrigen Personen aber noch irgend eine lebt, und folglich den Werth der gesuchten Anwartschaft $=$

$$\int \frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{r^x A}\left(\frac{B^{\overline{x}}}{B} + \frac{C^{\overline{x}}}{C} + \frac{D^{\overline{x}}}{D} - \frac{B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{B\,C} - \frac{B^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{B\,D} - \frac{C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{C\,D} + \frac{B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}\,D^{\overline{x}}}{B\,C\,D}\right).$$

Hiernach hat man, wenn $A^{\overline{x-1}} - A^{\overline{x}}$ anstatt $\Delta A^{\overline{x-1}}$ gesetzt wird, den Werth $= \frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,[\lambda\overline{(a-1)\,b} +$

$$\lambda\,\overline{(a-1)\,c} + \lambda\,\overline{(a-1)\,d} - \lambda\,\overline{(a-1)\,b\,c} - \lambda\,\overline{(a-1)\,b\,d} - \lambda\,\overline{(a-1)\,c\,d} + \lambda\,\overline{(a-1)\,b\,c\,d}] - (\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{ad}) + (\lambda\,\overline{abc} + \lambda\,\overline{abd} + \lambda\,\overline{acd}) - \lambda\,\overline{abcd}.$$

Sollte aber diese Summe zwar am Ende des Sterbejahrs von A, jedoch bey dem Tode derer A bezahlt werden, welche irgend eine der Personen B, C, D während eines Theils des Sterbejahrs überlebt, so wäre, wenn wieder z die verflossene Zeit bezeichnet, der gegenwärtige Werth der Zahlung des xten Jahrs =

$$\frac{\Delta\,A^{\overline{x-1}}}{A\,r^x} \int dz \left[\frac{B^{\overline{x-1}} - z\,\Delta B^{\overline{x-1}}}{B} + \frac{C^{\overline{x-1}} - z\,\Delta C^{\overline{x-1}}}{C} + \frac{D^{\overline{x-1}} - z\,\Delta D^{\overline{x-1}}}{D} - \frac{(B^{\overline{x-1}} - z\Delta B^{\overline{x-1}})\,(C^{\overline{x-1}} - z\Delta C^{\overline{x-1}})}{B\,C} \cdots + \frac{(B^{\overline{x-1}} - z\Delta B^{\overline{x-1}})(C^{\overline{x-1}} - z\Delta C^{\overline{x-1}})(D^{\overline{x-1}} - z\Delta D^{\overline{x-1}})}{B\,C\,D} \right],$$

woraus man den Werth für jeden gegebenen Fall finden kann.

Bestände z. B. die Verbindung aus drey Personen A B C und sollte die Summe 1 bey dem Tode von A, so wie vorher bestimmt worden, bezahlt werden, so wäre der Werth der Zahlung des xten Jahrs $= \frac{1}{2}\left(\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}}{A\,B\,r^x} + \frac{A^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,C\,r^x}\right.$

$$+\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x}}}{A\,B\,rx}+\frac{A^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x}}}{A\,C\,rx}\Big)-$$

$$\tfrac{1}{3}\Big(\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\,rx}+\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\,rx}\Big)-$$

$$\tfrac{1}{6}\Big(\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\,rx}+\frac{A^{\overline{x-1}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\,rx}\Big)-$$

$$\tfrac{1}{2}\Big(\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x-1}}}{A\,B\,rx}+\frac{A^{\overline{x}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,C\,rx}+$$

$$\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}}{A\,B\,rx}+\frac{A^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{A\,C\,rx}\Big)+$$

$$\tfrac{1}{3}\Big(\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\,rx}+\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\,rx}\Big)+$$

$$\tfrac{1}{6}\Big(\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x-1}}\,C^{\overline{x}}}{A\,B\,C\,rx}+\frac{A^{\overline{x}}\,B^{\overline{x}}\,C^{\overline{x-1}}}{A\,B\,C\,rx}\Big).$$

Hieraus erhält man den Werth der Anwartschaft

für alle Jahre $= \tfrac{1}{2}\Big[\frac{A^{\overline{-1}}\,B^{\overline{-1}}}{A\,B}\,\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)}$

$$+\frac{A^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{A\,C}\,\lambda\overline{(a-1)\,(c-1)}+$$

$$\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\overline{(a-1)\,b}+\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\overline{(a-1)\,c}-$$

$$\frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,\lambda\overline{a\,(b-1)}-$$

$$\frac{C^{\overline{-1}}}{C}\,\lambda\overline{a\,(c-1)}-\lambda\overline{a\,b}-\lambda\overline{a\,c}\Big]$$

$$-\tfrac{1}{3}\Big[\frac{A^{\overline{-1}}\,B^{\overline{-1}}\,C^{\overline{-1}}}{A\,B\,C}\,\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}$$

$$-\lambda\overline{abc} + \frac{A^{-1}}{A}\lambda\overline{(a-1)bc} -$$

$$\frac{B^{-1}\ C^{-1}}{B\ C}\lambda\overline{a(b-1)(c-1)}]$$

$$-\tfrac{1}{6}[\frac{A^{-1}\ B^{-1}}{A\ B}\lambda\overline{(a-1)(b-1)c}$$

$$+\frac{A^{-1}\ C^{-1}}{A\ C}\lambda\overline{(a-1)b(c-1)}$$

$$-\frac{B^{-1}}{B}\lambda\overline{a(b-1)c} -$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\lambda\overline{ab(c-1)}] =$$

$$\frac{2}{3r} - \frac{1}{pr}[\frac{\lambda\overline{ab}+\lambda\overline{ac}}{2} - \frac{\lambda\overline{abc}}{3}] +$$

$$\tfrac{1}{2}[\frac{A^{-1}}{A}\lambda\overline{(a-1)b} +$$

$$\frac{A^{-1}}{A}\lambda\overline{(a-1)c} -$$

$$\frac{B^{-1}}{B}\lambda\overline{a(b-1)} -$$

$$\frac{C^{-1}}{C}\lambda\overline{a(c-1)}] -$$

$$\tfrac{1}{3}[\frac{A^{-1}}{A}\lambda\overline{(a-1)bc} -$$

$$\frac{B^{-1}\ C^{-1}}{B\ C}\lambda\overline{a(b-1)(c-1)}] -$$

$$\tfrac{1}{6}\Big[\frac{A^{-1}\,B^{-1}}{A\,B}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} + \frac{A^{-1}\,C^{-1}}{A\,C}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b\,(c-1)} - \frac{B^{-1}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,c} - \frac{C^{-1}}{C}\,\lambda\,\overline{ab\,(c-1)}\Big].$$

Berechnet man den Werth dieser Summe, wenn sie bey dem Tode von B, in so fern dann noch irgend eine mitverbundene Person lebt, und bey dem Tode von C, falls dann noch ein Interessent vorhanden ist, bezahlt werden soll, und nimmt alle drey Werthe zusammen, so heben sich wieder diejenigen Theile, welche in die um ein Jahr zurückgerechneten Zahlen der Lebenden multiplicirt sind, auf, und es bleiben

$$\frac{2}{3r} - \frac{1}{pr}\Big[\frac{\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac}}{2} - \frac{\lambda\,\overline{abc}}{3}\Big] +$$
$$\frac{2}{3r} - \frac{1}{pr}\Big[\frac{\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{bc}}{2} - \frac{\lambda\,\overline{abc}}{3}\Big] +$$
$$\frac{2}{3r} - \frac{1}{pr}\Big[\frac{\lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{bc}}{2} - \frac{\lambda\,\overline{abc}}{3}\Big] =$$
$$\frac{2}{r} - \frac{1}{pr}\,[\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac} + \lambda\,\overline{bc} - \lambda\,\overline{abc}].$$

Dies ist aber $= \frac{3}{r} - \frac{1}{pr}\,[\lambda a + \lambda b + \lambda c] -$
$\frac{1}{r} + \frac{1}{pr}\,[\lambda a + \lambda b + \lambda c - \lambda\,\overline{ab} - \lambda\,\overline{ac} -$
$\lambda\,\overline{bc} + \lambda\,\overline{abc}]$, d. h. gleich der Summe der bey dem Tode jeder einzelnen Person unbedingt zu zahlenden Anwartschaft, weniger der bey dem Tode des Längstlebenden zu zahlenden Anwartschaft, (S. weiter unten §. 301).

Anm. Auch hier kann man den vollständigen Werth wieder unmittelbar erhalten, wenn man bey dem für ganze Jahre angegebenen Werthe in den Factoren, die in $\frac{\Delta A^{\overline{n-1}}}{A\, rn}$ multiplicirt sind, die vollständigen Werthe der Existenzen und Coexistenzen für jedes Jahr nach §. 209 b. setzt.

§. 300.

Es soll bey dem Tode der letztsterbenden unter den zwey Personen A und B die Anwartschaft 1 bezahlt werden, falls dann noch irgend eine der mit ihnen verbundenen Personen C, D und F lebt, man sucht den Werth der Anwartschaft (z. B. den Werth einer mehreren Kindern nach dem Tode beider Eltern zufallenden Erbschaft). Da die Anzahl der Paare von A und B, welche im xten Jahre ganz aufsterben $= \frac{A^{\overline{x-1}}}{A} + \frac{B^{\overline{x-1}}}{B} - \frac{A^{\overline{x-1}} B^{\overline{x-1}}}{A\ B} - \frac{A^{\overline{x}}}{A} - \frac{B^{\overline{x}}}{B} + \frac{A^{\overline{x}} B^{\overline{x}}}{AB}$ (§. 200), und die Anzahl der Vereine unter C, D, F, wovon am Ende noch irgend eine Person lebt, $= \frac{C^{\overline{x}}}{C} + \frac{D^{\overline{x}}}{D} + \frac{F^{\overline{x}}}{F} - \frac{C^{\overline{x}} D^{\overline{x}}}{C\, D} - \frac{C^{\overline{x}} F^{\overline{x}}}{C\, F} - \frac{D^{\overline{x}} F^{\overline{x}}}{D\, F} + \frac{C^{\overline{x}} D^{\overline{x}} F^{\overline{x}}}{C\, D\, F}$ (ebendaselbst), so hat man, auf ganze Jahre gerechnet, den discontirten Werth der Zahlung für das xte Jahr $= \frac{1}{rx} \left(\frac{A^{\overline{x-1}}}{A} + \frac{B^{\overline{x-1}}}{B} \right.$

$$-\frac{A^{x-1}B^{x-1}}{AB}-\frac{A^{x}}{A}-\frac{B^{x}}{B}+\frac{A^{x}B^{x}}{AB})\,(\frac{C^{x}}{C}+\frac{D^{x}}{D}+\frac{F^{x}}{F}-\frac{C^{x}D^{x}}{CD}-\frac{C^{x}F^{x}}{CF}-\frac{D^{x}F^{x}}{DF}+\frac{C^{x}D^{x}F^{x}}{CDF}),$$

wonach man für jeden Fall den ganzen Werth finden kann.

Sind z. B. der überlebenden Personen zwey, nämlich C und D, so ist der gegenwärtige Werth der Zahlung des xten Jahrs $=\frac{1}{r^x}\,(\frac{A^{x-1}}{A}+\frac{B^{x-1}}{B}-\frac{A^{x-1}B^{x-1}}{AB}-\frac{A^{x}}{A}-\frac{B^{x}}{B}+\frac{A^{x}B^{x}}{AB})\,(\frac{C^{x}}{C}+\frac{D^{x}}{D}-\frac{C^{x}D^{x}}{CD})$. Hieraus erhält man den Werth der Anwartschaft $=\frac{A^{-1}}{A}\,[\lambda\overline{(a-1)\,c}+\lambda\overline{(a-1)\,d}]+\frac{B^{-1}}{B}\,[\lambda\overline{(b-1)c}+\lambda\overline{(b-1)d}]-[\lambda\overline{ac}+\lambda\overline{ad}+\lambda\overline{bc}+\lambda\overline{bd}]-\frac{A^{-1}B^{-1}}{AB}\,[\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,c}+\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,d}]-\frac{A^{-1}}{A}\,\lambda\overline{(a-1)\,c\,d}-\frac{B^{-1}}{B}\,\lambda\overline{(b-1)\,cd}+\lambda\overline{abc}+\lambda\overline{abd}+\lambda\overline{acd}+\lambda\overline{bcd}+\frac{A^{-1}B^{-1}}{AB}\,\lambda\overline{(a-1)\,(b-1)\,c\,d}-\lambda abcd.$

Da aber hienach die Anwartschaft nur berechnet ist für diejenigen Personen unter CD, die am Ende des Jahrs, worin das Paar AB aufstirbt, noch leben, und daher für diejenigen C oder D noch etwas hinzugelegt werden muſs, die zwar am Ende des Jahrs todt sind, aber doch bey dem Sterbefalle von A oder B noch lebten, so müſste zu dem obigen Werthe noch eine Correction hinzukommen. Wollte man aber in dem obigen Beispiele, wie vorher, anstatt C^{x} setzen $C^{x-1} - z\,\Delta C^{x-1}$ etc., so würde der endliche Ausdruck aus 64 verschiedenen Leibrenten für zwey, drey und vier Personen bestehen. Man könnte daher, um die Rechnung abzukürzen, wenn der Werth nach der obigen Formel gefunden ist, auch den Werth einer ähnlichen Anwartschaft für den Fall suchen, wenn A und B das nämliche Alter behalten, C und D aber um ein Jahr jünger sind als vorher, und diesen Werth mit $\frac{C^{-1}\,D^{-1}}{C\,D}$ multipliciren, wo man dann den Werth so erhält, als wenn alle in jedem Jahre abgehende CD, deren mitverbundenes Paar AB in demselben Jahre aufstirbt, die Summe 1 erhielten. Beide Werthe kann man dann zusammenlegen und die Hälfte davon als einen Näherungswerth ansehen, da man ohne beträchtlichen Fehler annehmen kann, dafs der Abgang der Personen CD in jedem Jahre für sich gleichmäfsig geschehe.

Anm. Sollen die in dem 295 bis 300 bestimmten Anwartschaften nicht am Ende jedes Jahrs, sondern sofort bey dem

eintretenden Sterbefall bezahlt werden, so kann man die angegebenen vollständigen Werthe noch mit $\frac{\pi}{p}$ multipliciren, da die sonstige Correction, so weit sie die Zinsen der Anwartschaften angeht, nach §. 294 wohl als unbeträchtlich übergangen werden kann.

§. 301.

Manche Anwartschaften lafsen sich folgendermaafsen sehr leicht finden. Wenn man mit λX eine solche Leibrente, Verbindungsrente oder Rente auf das längste Leben und die längste Verbindung bezeichnet, die *vom Anfange an bis zum Abgang der einen Person oder Auflösung der Verbindung unverändert* jährlich mit 1 Rth. bezahlt werden soll, mit ϑX aber den baaren Werth der Summe 1, die bezahlt werden soll bey dem Tode der einen Person, Auflösung der Verbindung etc., und zwar am Ende des Jahrs, wo die Lebensrente aufhört, (folglich ein Jahr später als der letzte Termin der Leibrente fällig wird), so ist der baare Werth dieser Summe, falls sie in dem Augenblick bezahlt werden sollte, wo die Leibrente aufhört, $= r\vartheta X$, und der gegenwärtige Werth eines Kapitals, das vom Aufhören der Lebensrente an immerwährend die Zinse 1 tragen sollte, $= pr\vartheta X$ (Vergl. §. 116 b.). Nimmt man nun den Werth der Lebensrente 1 und den baaren Werth des Kapitals, das vom Aufhören der Lebensrente die immerwährende Zinse 1 trägt, zusammen, so erhält man das Grundkapital, das eine immerwährende Zinse 1 giebt, d. h. es ist $\lambda X + pr\vartheta X = p$, also $\vartheta X = \frac{1}{r} - \frac{\lambda X}{pr}$. Es sey z. B.

$\lambda X = \lambda \overline{abcd}$, so ist $\vartheta\,\overline{abcd} = \frac{1}{r} - \frac{\lambda\,\overline{abcd}}{pr}$ (Vergl. §. 293).

Bedeutet nun λX die Rente für den Längstlebenden unter m Personen, so ist $\lambda X = S.\lambda I - S.\lambda\overline{II} + S.\lambda\overline{III} - .. \pm \lambda M$, und der Werth der Summe 1, die bey dem Abgange des Längstlebenden bezahlt werden soll, oder ϑX, ist $= \frac{1}{r} - \frac{1}{pr} \times (S.\lambda I - S.\lambda\overline{II} + S.\lambda\overline{III} - .. \pm \lambda M)$. Wenn also die anfängliche Verbindung aus drey Personen, ABC, besteht, so ist der gegenwärtige Werth der Anwartschaft 1, die bey dem Abgange des Längstlebenden bezahlt werden soll, $= \frac{1}{r} - \frac{1}{pr} (\lambda a + \lambda b + \lambda c - \lambda\overline{ab} - \lambda\overline{ac} - \lambda\overline{bc} + \lambda\overline{abc})$ (§. 296). Besteht die Verbindung aus vier Personen, so ist der gesuchte Werth $= \frac{1}{r} - \frac{1}{pr} (\lambda a + \lambda b + \lambda c + \lambda d - \lambda\overline{ab} - \lambda\overline{ac} - \lambda\overline{ad} - \lambda\overline{bc} - \lambda\overline{bd} - \lambda\overline{cd} + \lambda\overline{abc} + \lambda\overline{abd} + \lambda\overline{acd} + \lambda\overline{bcd} - \lambda\overline{abcd})$ etc.

Wäre λX die Rente für eine längste Verbindung zu n unter m Personen, oder $\lambda X = S.\lambda\overline{N} - \frac{n}{1} S.\lambda\overline{N+1} + \frac{n.n+1}{1.2} S.\lambda\overline{N+II} - .. \pm \frac{n.n+1..m-1}{1.2..m-n} \lambda M$ (§. 279), so hätte man den Werth der Anwartschaft, die bey dem Aufhören dieser längsten Verbindung, d. h. bey dem $(m - n + 1)$ten Sterbefall in dem Verein, bezahlt werden sollte, $= \frac{1}{r} - \frac{1}{pr} (S\lambda N -$

$\frac{n}{1} S.\lambda \overline{N+1} + \frac{n.n+1}{1.2} S.\lambda \overline{N+II} - ..$). Bestände z. B. die Verbindung aus vier Personen ABCD, so wäre die Summe 1, die bey dem Aufhören der Verbindung zu 4, d. h. dem ersten Todesfall, bezahlt werden sollte, $= \frac{1}{r} - \frac{1}{pr} \lambda \overline{abcd}$. Ferner wäre die Summe, die bey Auflösung der längsten Verbindung zu 3, d. h. bey dem Tode der Person, welche die zweite im Sterben ist, bezahlt werden sollte, $= \frac{1}{r} - \frac{1}{pr} (\lambda\overline{abc} + \lambda\overline{abd} + \lambda\overline{acd} + \lambda\overline{bcd} - 3\lambda\overline{abcd})$. Sollte bey derselben Anzahl von Personen die Anwartschaft fällig seyn bey dem Aufhören der letzten Verbindung zu zwey, so wäre der Werth $=$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{pr} [\lambda \overline{ab} + \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{ad} + \lambda \overline{bc} + \lambda \overline{bd} + \lambda \overline{cd} - 2 (\lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{acd} + \lambda \overline{bcd}) + 3 \lambda \overline{abcd}].$$

§. 301. b.

Hiernach kann auch der Werth der Anwartschaft bestimmt werden, wenn bey dem Tode jeder von m Personen, bis auf gewisse der Ordnung nach angegebene, die Summe 1 bezahlt werden soll, indem die Werthe der bey dem Tode jeder einzelnen Person zu zahlenden Summen zusammengenommen und davon der Werth der Anwartschaft für die ausgenommenen Fälle abgezogen, oder auch die Werthe der Anwartschaft für diejenigen der Ordnung nach gegebenen Fälle, wo sie bezahlt werden soll, zusammengenommen werden.

Sind z. B. wieder vier Personen A B C D, und

soll bey dem Tode einer jeden, so lange noch eine andre lebt, d. h. mit Ausnahme der Längstlebenden, die Summe 1 bezahlt werden, so hat man den gesammten Werth $= \frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr} + \frac{1}{r} - \frac{\lambda b}{pr} + \frac{1}{r} - \frac{\lambda c}{pr} + \frac{1}{r} - \frac{\lambda d}{pr} - \frac{1}{r} + \frac{1}{pr} (\lambda a + \lambda b + \lambda c + \lambda d - \lambda \overline{ab} - \lambda \overline{ac} - \lambda \overline{ad} - \lambda \overline{bd} - \lambda \overline{bc} - \lambda \overline{cd} + \lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{acd} + \lambda \overline{bcd} - \lambda \overline{abcd}) = \frac{3}{r} - \frac{1}{pr} (\lambda \overline{ab} + \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{ad} + \lambda \overline{bc} + \overline{bd} + \lambda \overline{cd} - \lambda \overline{abc} - \lambda \overline{abd} - \lambda \overline{acd} - \lambda \overline{bcd} + \lambda \overline{abcd})$.

Sollte die Summe 1 nur bey dem Tode der beiden zuerst Sterbenden bezahlt werden, so müfste man noch von dem letzten Ausdruck den angegebenen Werth der Anwartschaft für die dritte Person im Sterben abziehen, nämlich $\frac{1}{r} - \frac{1}{pr} [\lambda \overline{ab} + \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{ad} + \lambda \overline{bc} + \lambda \overline{bd} + \lambda \overline{cd} - 2 (\lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{acd} + \lambda \overline{bcd}) + 3 \lambda \overline{abcd}]$, und man erhielte das Gesuchte $= \frac{2}{r} - \frac{1}{pr} (\lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{acd} + \lambda \overline{bcd} - 2 \lambda \overline{abcd})$.

Würde hierin der Werth für die zweite Person im Sterben, oder $\frac{1}{r} - \frac{1}{pr} (\lambda \overline{abc} + \lambda \overline{abd} + \lambda \overline{acd} + \lambda \overline{bcd} - 3 \lambda \overline{abcd})$, abgezogen, so erhielte man den Rest $= \frac{1}{r} - \frac{\lambda \overline{abcd}}{pr}$, als den Werth der bey dem ersten Todesfall zu zahlenden Summe 1.

Anm. Man mufs indefsen bey dem im §. 301 vorgetragenen

Satze nicht übersehen, dafs derselbe nur in so fern gilt, als $\lambda X + p r \vartheta X = p$ ist, also in so weit als die Lebensrente vom Anfang an unverändert bis zu einem bestimmten Abgang bezahlt wird. Wollte man unter λX eine Ueberlebensrente oder eine andre sonst bedingte Rente verstehen, so würde nicht der Werth der Rente und der gegenwärtige Werth des Kapitals, das vom Aufhören der Rente an jährlich die Zinse r trägt, gleich dem Grundkapital seyn, und der vorgetragene Satz wäre auf diesen Fall nicht anzuwenden.

§. 302.

Alle Anwartschaften, von denen bisher gehandelt worden, lafsen sich auf zwey oder mehrere Lebensrenten für eine oder mehrere Personen zurückführen, und zwar fangen, wenn die Anwartschaft sofort vom ersten Jahre an im eintretenden Fall zahlbar seyn soll, alle Lebensrenten, worauf die Anwartschaft reducirt wird, sofort an zu laufen. Soll aber die Anwartschaft mit den nämlichen Bestimmungen *vom n + 1ten Jahre an zahlbar* seyn, so müfsen in der Fundamentalformel für dieselbe alle veränderliche Zahlen der Lebenden um n Jahre weiter fortrücken, auch der Exponent der Potenz von $\frac{1}{r}$ um n gröfser werden, wogegen die Anfangszahlen der Lebenden unverändert bleiben. Wenn z. B. die Fundamentalformel für eine Anwartschaft $=$ $\int \frac{\Delta A^{n-1}}{A\ r^n} \frac{(B - B^n)\ (C - C^n)}{B\ C}$ wäre, so wäre bey der sofort zahlbaren Anwartschaft das erste Glied $= \frac{\Delta A^{o}}{A\ r} \frac{(B\text{-}B^{1})\ (C\text{-}C^{1})}{B\ C}$, bey der um n Jahre aufge-

schobenen Anwartschaft aber $= \frac{\triangle A^{-n} (B\text{-}B^{-n+r})(C\text{-}C^{-n+r})}{A\, r^{n+r}\quad B\ C}$.

Da übrigens die Fundamentalformel dieselbe Form behält, die Anwartschaft mag sofort oder erst vom $n+1$ten Jahre an zahlbar seyn, so erhält man auch durch Reduction beider Formeln auf die Lebensrenten eben so viel und eben so zusammengesetzte Lebensrenten, nur mit dem Unterschiede, dafs in jeder einzelnen zu der aufgeschobenen Anwartschaft gehörigen Lebensrente die veränderlichen Zahlen der Lebenden um n Jahre fortrücken, auch der Exponent von r um n gröfser wird. Wenn z. B. irgend eine Lebensrente bey der gleich laufenden Anwartschaft $= \int \frac{A'^{\circ} B'^{\circ} C'^{1} D'^{1}}{ABCD\ r'} = \frac{A^{-1} B^{-1}}{A\ B} \times$

$\lambda\,(a-1)\,(b-1)\,c\,d$ war, so wird eben dieser Theil bey der um n Jahre aufgeschobenen Anwartschaft $=$

$$\int \frac{A^{-n} B^{-n} C^{-n+r} D^{-n+r}}{ABCD\ r^{n+r}} = \frac{A^{-n-1}\ B^{-n-1}\ C^{-n}\ D^{-n}}{A\ B\ C\ D\quad r^{n}} \times$$

$$\lambda\,(a+n-1)\,(b+n-1)\,(c+n)\,(d+n).$$

Wenn also die Anwartschaft um n Jahre aufgeschoben werden soll, so müfsen, aus wie vielen Theilen der Ausdruck dafür auch bestehen mag, in jeder Theil-Rente die veränderlichen Lebensjahre um n vermehrt, der Werth auf n Jahre discontirt und mit der Wahrscheinlichkeit, dafs dieselbe Verbindung von Personen, welche bey dieser Theilrente zu Grunde liegt, am Ende des nten Jahrs bestehe, multiplicirt werden.

Ist irgend eine Altersergänzung kleiner als n, so fallen diejenigen Theile, worin die Zahl der Lebenden vorkömmt, der diese Altersergänzung zugehört, weg, indem der eine Factor darin $= 0$ wird und die Verbindungen mit den Personen, denen die gedachte Altersergänzung zukömmt, aufgehört haben.

§. 303.

Falls eine Erbschaft *nach n Jahren aufhören* sollte, d. h. nur bey den Sterbefällen, die in den ersten n Jahren vom Anfangstermin an eintreten, bezahlt werden sollte, so fände man ihren Werth, indem man von dem Werthe der jetzt laufenden Erbschaft den Werth der um n Jahre aufgeschobenen Erbschaft abzöge.

Sollte dagegen die Zahlbarkeit der Erbschaft erst nach Ablauf der ersten n Jahre anfangen und mit dem Ende des $n + m$ten Jahrs wieder aufhören, so müfste man den Werth der um n Jahre, imgleichen der um $n + m$ Jahre aufgeschobenen Erbschaft suchen, und den letztern von dem erstern abziehen, wo dann der Rest das Gesuchte giebt.

§. 304.

Wenn eine Erbschaft zahlbar wäre vom Ablauf des nten Jahrs an unter der *Bedingung*, dafs sämmtliche zusammenverbundene Personen bis dahin gelebt hätten, so müfste man den Werth der Erbschaft für den Fall, da sämmtliche Personen um n Jahre älter wären, suchen, denselben auf den Anfangstermin discontiren und mit der Wahrscheinlichkeit, dafs alle zusammen verbundene Personen am Ende des nten Jahrs noch leben, multipliciren.

§. 305.

Bey dem Tode von F sollen zwey Personen, A und B, so fern sie dann noch leben, die Summe I zu gleichen Theilen erben, (nämlich so dafs wenn sie beide leben, die Summe halbschiedlich getheilt wird, wenn nur noch einer lebt, sie diesem allein zufällt, wenn aber keiner von ihnen mehr lebt, sie auf Fremde übergeht); man will den gegenwärtigen Werth des Antheils von A und B wifsen. Die Summe, welche bey dem Abgange der Person F im nten Jahr fällig wird, ist $= \frac{\Delta F^{\overline{n-1}}}{F\,rn} = \frac{F^{\overline{n-1}} - F^{\overline{n}}}{F\,rn}$. Ferner sind die verschiedenen möglichen Fälle des Lebens und Todes unter den Personen A und B in dem nämlichen Jahre $= \frac{A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}}{A\,B} + \frac{A^{\overline{n}}(B-B^{\overline{n}})}{A\,B} + \frac{B^{\overline{n}}(A-A^{\overline{n}})}{A\,B} + \frac{(A-A^{\overline{n}})\,(B-B^{\overline{n}})}{A\,B} = 1$ (§. 198), und es ist daher auch der Werth der bey dem Ableben von F im nten Jahr vorfallenden Zahlung $= \frac{F^{\overline{n-1}} - F^{\overline{n}}}{F\,rn}\left[\frac{A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}}{A\,B} + \frac{A^{\overline{n}}(B-B^{\overline{n}})}{A\,B} + \frac{B^{\overline{n}}(A-A^{\overline{n}})}{A\,B} + \frac{(A-A^{\overline{n}})(B-B^{\overline{n}})}{AB}\right]$. Hieraus erhält man den Werth für alle Jahre bis zur Altersergänzung von $F = \int \frac{F^{\overline{n-1}}\,A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}}{rn\;F\;A\;B} + \int \frac{F^{\overline{n-1}}\,A^{\overline{n}}\,(B-B^{\overline{n}})}{rn\;F\;A\;B} + \int \frac{F^{\overline{n-1}}\,B^{\overline{n}}\,(A-A^{\overline{n}})}{rn\;F\;A\;B} +$

$$\int \frac{F^{n-1}(A-A^{n})(B-B^{n})}{rn\ F\ A\ B} - \int \frac{F^{n}A^{n}B^{n}}{rn\ F\ A\ B} -$$

$$\int \frac{F^{n}A^{n}(B-B^{n})}{rn\ F\ A\ B} - \int \frac{F^{n}B^{n}(A-A^{n})}{rn\ F\ A\ B} -$$

$$\int \frac{F^{n}(A-A^{n})(B-B^{n})}{rn\ F\ A\ B}$$, und der Werth sämtlicher Zahlungen ist $= \int \frac{\Delta F^{n-1}}{F\ rn} = \vartheta f$, d. i. der bey dem Tode von F zu zahlenden Summe 1. Alle die angegebenen Ausdrücke sind Verbindungs- oder Ueberlebensrenten, deren Werth nach den vorher ertheilten Vorschriften gefunden werden kann. Da nun A, so lange er mit B zusammenlebt, $\frac{1}{2}$, sofern er aber nach B allein lebt, das Ganze erhalten soll, so ist der baare Antheil von $A = \frac{1}{2} \int \frac{F^{n-1}A^{n}B^{n}}{rn\ F\ A\ B}$

$$+ \int \frac{F^{n-1}A^{n}(B-B^{n})}{rn\ F\ A\ B} - \frac{1}{2} \int \frac{F^{n}A^{n}B^{n}}{rn\ F\ A\ B} -$$

$$\int \frac{F^{n}A^{n}(B-B^{n})}{rn\ F\ A\ B} = \frac{F^{-1}}{F} [\tfrac{1}{2} \lambda\ \overline{ab\ (f-1)} +$$

$\lambda\ \overline{a\ (f-1)} - \lambda\ \overline{ab\ (f-1)}] - \frac{1}{2} \lambda\ \overline{abf} - \lambda\ \overline{af}$

$+ \lambda \overline{abf} = \frac{F^{-1}}{F} [\lambda\ \overline{a\ (f-1)} - \frac{1}{2} \lambda\ \overline{a\ b\ (f-1)}] -$

$\lambda\ \overline{af} + \frac{1}{2} \lambda\ \overline{abf}$. Auf die nämliche Weise hat man den Antheil von $B = \frac{F^{-1}}{F} [\lambda\ \overline{b(f-1)} - \frac{1}{2} \lambda \overline{ab(f-1)}] -$

$\lambda\ \overline{bf} + \frac{1}{2} \lambda\ \overline{abf}$.

Wenn z. B. a = 10, b = 20, und f = 50, so ist nach Wargentins Tabelle und dem Zinsfuſs von 4 Procent der Werth für A = $\frac{1}{3}\frac{0}{8}\frac{2}{4}\frac{2}{6}\frac{4}{0}$ (11,019 — $\frac{1}{2}$·10,034) — 10,802 + $\frac{1}{2}$·9,852 = 0,248, der Antheil für B aber = $\frac{1}{3}\frac{0}{8}\frac{2}{4}\frac{2}{6}\frac{4}{0}$ (10,772 — $\frac{1}{2}$·10,034) — 10,568 + $\frac{1}{2}$·9,852 = 0,230. Beide Antheile zusammen sind = 0,478. Da nun ϑ50 nach Wargentins Tabelle = 0,513 ist, so ist 0,513 — 0,478 = 0,035 der Antheil, welcher nach dem Ableben sowohl von A als von B Fremden zufallen würde. (Da hier nur ein Beispiel angeführt werden sollte, so sind alle Werthe auf ganze Jahre, auch die Verbindungsrenten λ(10.49), λ(20.49) und λ(10.20.49) nach der Interpolation berechnet. Wollte man die genauen Werthe nehmen, so würden die Antheile wohl etwas anders ausfallen).

Sollten der Erben drey, A B und C, seyn, so wäre der Inbegriff der möglichen Fälle des Lebens und Todes unter ihnen in irgend einem nten Jahre =

$$\frac{A^{n}\,B^{n}\,C^{n}}{A\,B\,C} + \frac{A^{n}\,B^{n}\,(C - C^{n})}{A\,B\,C} + \frac{A^{n}\,C^{n}\,(B - B^{n})}{A\,B\,C} + \frac{B^{n}\,C^{n}\,(A - A^{n})}{A\,B\,C} + \frac{A^{n}(B\text{-}B^{n})\,(C\text{-}C^{n})}{A\,B\,C} + \frac{B^{n}(A\text{-}A^{n})\,(C\text{-}C^{n})}{A\,B\,C} + \frac{C^{n}\,(A - A^{n})\,(B - B^{n})}{A\,B\,C} +$$

$$\frac{(A - \overline{A}^{n})\ (B - \overline{B}^{n})\ (C - \overline{C}^{n})}{A\ B\ C}$$ (§. 198).

Wenn man also hier jeden einzelnen Bruch mit $\frac{\overline{F}^{n-1}}{\overline{Frn}}$ und $\frac{\overline{F}^{n}}{\overline{Frn}}$ multiplicirt, so erhält man 16 verschiedene Verbindungs- und Ueberlebensrenten für vier Personen. Sucht man nun den Antheil von A, so besteht derselbe aus $\frac{1}{3}$ der Rente, die A mit B und C gemeinschaftlich genieſsen sollte, ferner $\frac{1}{2}$ aller derer Renten, welche A mit irgend einer Person von B und C gemeinschaftlich bezieht, und zuletzt aus der ganzen Rente, die A allein erhält. Es wäre also z. B. der Antheil von A $= \frac{\overline{F}^{-1}}{\overline{F}} - [\lambda\, \overline{a\,(f-1)}$ $- \frac{1}{2}\lambda\, \overline{ab\,(f-1)} - \frac{1}{2}\lambda\, \overline{ac\ (f-1)} + \frac{1}{3}\lambda\, \overline{abc\,(f-1)}]$ $- \lambda\, \overline{af} + \frac{1}{2}\lambda\, \overline{abf} + \frac{1}{2}\lambda\, \overline{acf} - \frac{1}{3}\lambda\, \overline{abcf}.$

§. 305 b.

Wären zwey Personen, F und M, mit drey andern A, B und C solchergestalt verbunden, dafs wenn die letzte von F und M stürbe, die drey A, B, C zu gleichen Theilen, so wie vorher bestimmt worden, die Erbschaft 1 erhalten sollten, so müfste man aus dem Werthe der Zahlung des nten Jahrs, $= \frac{1}{rn}\left[\frac{\overline{F}^{n-1}}{\overline{F}} + \frac{\overline{M}^{n-1}}{\overline{M}} - \frac{\overline{F}^{n-1}\,\overline{M}^{n-1}}{F\ M} - \right.$ $\left. \frac{\overline{F}^{n}}{\overline{F}} - \frac{\overline{M}^{n}}{\overline{M}} + \frac{\overline{F}^{n}\,\overline{M}^{n}}{F\ M}\right]\left[\frac{\overline{A}^{n}\,\overline{B}^{n}\,\overline{C}^{n}}{A\ B\ C} + \right.$

$$\frac{A^{n}B^{n}(C\text{-}C^{n})}{A\,B\,C} + \frac{A^{n}C^{n}(B\text{-}B^{n})}{A\,B\,C} + \frac{B^{n}C^{n}(A\text{-}A^{n})}{A\,B\,C}$$
$$+\frac{A^{n}(B-B^{n})\,(C-C^{n})}{A\,B\,C} + \frac{B^{n}(A-A^{n})\,(C-C^{n})}{A\,B\,C}$$
$$+\frac{C^{n}(A\text{-}A^{n})\,(B\text{-}B^{n})}{A\,B\,C} + \frac{(A\text{-}A^{n})\,(B\text{-}B^{n})\,(C\text{-}C^{n})}{A\,B\,C}],$$

die einzelnen Renten bestimmen, und dann wieder von den Renten, die A mit den zwey andern zusammen beziehen würde, ein Drittheil, von den Renten, die er mit irgend einer andern Person gemeinschaftlich genöfse, die Hälfte, und von denen, die er allein bezöge, das Ganze nehmen, um den Antheil von A zu finden.

§. 306.

Eine der Zahl nach geschlofsene Gesellschaft von Paaren aus AB wird errichtet, unter der Bedingung, dafs jedes bestehende Paar oder, wenn eine Person aus dem Paar verstorben ist, das andere lebende Individuum bey dem Tode jedes einzelnen Interefsenten die Summe 1 zahlen solle; man soll den Werth der Anwartschaft für jedes Paar bestimmen. Wenn die anfängliche Zahl der Paare = AB ist, und auf ganze Jahre gerechnet, auch jeder Sterbethaler am Schlufse des Sterbejahrs bezahlt werden soll, so ist in dem xten Jahre die Zahl der abgehenden $A = \triangle A^{x-1} B = (A^{x-1} - A^{x}) B$, und die Zahl der abgehenden $B = \triangle B^{x-1} A =$

$(\overset{x-1}{B\!\!-\!\!-} - \overset{x}{B\!-})$ A, worunter auch die zusammengehörigen A und B begriffen sind, welche beide in dem nämlichen Jahre sterben. Dagegen ist die Zahl derer Paare, wovon irgend eine Person vorhanden ist, $= \overset{x}{A\!\!-\!\!-}\,B + \overset{x}{B\!\!-\!\!-}\,A - \overset{x}{A\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{B\!\!-\!\!-}$. Folglich wird der gegenwärtige Werth der Zahlung für das xte Jahr, auf jedes Paar vertheilt, $=$

$$\frac{[(\overset{x-1}{A\!\!-\!\!-} - \overset{x}{A\!-})B + (\overset{x-1}{B\!\!-\!\!-} - \overset{x}{B\!-})A]\ (\overset{x}{A\!-}B + AB\overset{x}{\!-\!\!-} - \overset{x}{A\!-}\overset{x}{B\!-})}{A\ B\ rx}$$

$$= \Big(\frac{\overset{x-1}{A\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{A\!-}\,B}{A\ rx} + \frac{\overset{x-1}{A\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{B\!-}}{rx} - \frac{\overset{x-1}{A\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{A\!-}\,\overset{x}{B\!-}}{A\ rx}$$

$$- \frac{\overset{x}{A\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{A\!-}\,B}{A\ rx} - \frac{\overset{x}{A\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{B\!-}}{rx} + \frac{\overset{x}{A\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{A\!-}\,\overset{x}{B\!-}}{A\ rx}$$

$$+ \frac{\overset{x-1}{B\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{B\!-}\,A}{B\ rx} + \frac{\overset{x-1}{B\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{A\!-}}{rx} - \frac{\overset{x-1}{B\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{A\!-}\,\overset{x}{B\!-}}{B\ rx}$$

$$- \frac{\overset{x}{B\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{B\!-}\,A}{B\ rx} - \frac{\overset{x}{B\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{A\!-}}{rx} + \frac{\overset{x}{B\!\!-\!\!-}\,\overset{x}{A\!-}\,\overset{x}{B\!-}}{B\ rx}\Big).$$

Nimmt man aber die Zahlungen für alle Jahre zusammen, so erhält man den gesuchten Werth $=$

$$\overset{-1}{A\!\!-\!\!-}\,B\,[\lambda\,\overline{(a-1)\,a} + \lambda\,\overline{(a-1)\,b} - \lambda\,\overline{(a-1)ab}]$$

$$+ AB\overset{-1}{\!-\!\!-}\,[\lambda\,\overline{(b-1)\,b} + \lambda\,\overline{(b-1)a} - \lambda\overline{(b-1)ab}]$$

$$- AB\,[\lambda\,\overline{aa} + \lambda\,\overline{bb} + 2\,\lambda\,\overline{ab} - \lambda\,\overline{aab} - \lambda\,\overline{abb}].$$

Sollte die Anzahl der in Gesellschaft tretenden Paare $= N$ seyn, so müfste man den gefundenen Ausdruck mit $\frac{N}{AB}$ multipliciren und man erhielte

dann den Werth $= \frac{N\,\overline{A}^{-1}}{A}\,[\lambda\,\overline{(a-1)\,a} + \lambda\,\overline{(a-1)\,b} - \lambda\,\overline{(a-1)\,ab}] + \frac{N\,\overline{B}^{-1}}{B}\,[\lambda\,\overline{(b-1)\,b} + \lambda\,\overline{(b-1)\,a} - \lambda\,\overline{ab\,(b-1)}] - N\,[\lambda\,\overline{aa} + \lambda\,\overline{bb} + 2\,\lambda\,\overline{ab} - \lambda\,\overline{aab} - \lambda\,\overline{abb}]$.

Ex. Es sey $N = 300$, $a = 40$, $b = 50$, so ist der gedachte Werth nach Wargentins allgemeiner Sterblichkeitstafel und dem Zinsfufse von 4 Procent $= \frac{300.4651}{4591}\,(11{,}070 + 9{,}713 - 8{,}269) + \frac{300.3924}{3846}\,(8{,}821 + 9{,}795 - 7631) - 300\,(10{,}964 + 8{,}708 + 19{,}280 - 8{,}229 - 7{,}565) = 303{,}92.12{,}514 + 306{,}08.10{,}985 - 300.23{,}158 = 3803{,}56 + 3362{,}33 - 6947{,}4 = 218{,}4$. (Die Verbindungsrenten sind indefsen auch hier nach der Interpolation berechnet, und es ist daher die Genauigkeit des Werths nicht zu verbürgen).

Wollte man aber diese Anwartschaft auf augenblickliche Theile des Jahrs berechnen, jedoch so dafs die Zahlungen am Ende des Jahrs geschehen, so hätte man den Werth der Zahlung des xten Jahrs $= (\frac{\Delta\overline{A}^{x-1}}{A\,rx} + \frac{\Delta\overline{B}^{x-1}}{B\,rx})\int[(\overline{A}^{x-1} - z\,\Delta\overline{A}^{x-1})\,B + (\overline{B}^{x-1} - z\,\Delta\overline{B}^{x-1})\,A - (\overline{A}^{x-1} - z\,\Delta\overline{A}^{x-1}) \times (\overline{B}^{x-1} - z\,\Delta\overline{B}^{x-1})]\,dz$.

Hieraus erhält man den vollständigen Werth=

$$\tfrac{1}{2}\Big[\frac{B}{A}\,A^{-1}A^{-1}\lambda\overline{(a-1)(a-1)} + \frac{A}{B}\,B^{-1}B^{-1}\lambda\overline{(b-1)(b-1)}\Big]$$

$$+ A^{-1}B^{-1}\lambda\overline{(a-1)(b-1)} - AB\,\lambda\overline{ab} - \tfrac{1}{2}AB\,(\lambda\overline{aa} + \lambda\overline{bb})$$

$$-\tfrac{1}{3}A^{-1}B^{-1}\Big[\frac{A^{-1}}{A}\lambda\overline{(a-1)(a-1)(b-1)} + \frac{B^{-1}}{B}\lambda\overline{(a-1)(b-1)(b-1)}\Big]$$

$$-\tfrac{1}{6}\Big[\frac{B}{A}A^{-1}A^{-1}\lambda\overline{(a-1)(a-1)b} + \frac{A}{B}B^{-1}B^{-1}\lambda\overline{a(b-1)(b-1)}\Big]$$

$$+\tfrac{1}{6}A^{-1}B^{-1}\big[\lambda\,\overline{a(a-1)(b-1)} + \lambda\,\overline{(a-1)(b-1)b}\big]$$

$$-\tfrac{1}{6}\big[A^{-1}B\,\lambda\,\overline{a(a-1)b} + AB^{-1}\lambda\,\overline{ab(b-1)}\big]$$

$$+\tfrac{1}{6}\big[A^{-1}B\,\lambda\,\overline{(a-1)bb} + AB^{-1}\lambda\,\overline{aa(b-1)}$$

$$+\tfrac{1}{3}AB\,(\lambda\,\overline{aab} + \lambda\,\overline{abb}).$$

Wäre die anfängliche Anzahl der Paare wieder $= N$, so müfste man diesen Ausdruck, wie vorher, mit $\frac{N}{AB}$ multipliciren.

Anm. Uebrigens gilt auch hier dasjenige, was früher §. 193 über die Unzweckmäfsigkeit der Todtenkafsen dieser Art gesagt worden.

§. 307.

Wenn die Anwartschaft von dem *zwiefachen Ueberleben* abhienge, und zuerst bezahlt werden sollte bey dem Tode von A, unter der Bedingung, dafs *vorher B überlebt hätte C*, so erhielte man, auf ganze Jahre gerechnet, den Werth derselben $=$

$$\int \frac{\Delta A^{x-1}\,\overline{\int B^{x}\,\Delta C^{x-1}}}{r^{x}\,A\,B\,C},$$

wo x die Altersergänzung von A ist. Dies ist, nach Analogie der §. 229 und 270,=

$\frac{1}{ABC}$ $(B^1 \Delta C^0 \int \frac{\Delta A'^0}{r^1} + B^2 \Delta C^1 \int \frac{\Delta A'^1}{r^2} + B^3 \Delta C^2 \int \frac{\Delta A'^2}{r^3} + ..) = \frac{1}{BC}$ $(B^1 \Delta C \vartheta a + B^2 \Delta C^1 \overline{\vartheta a}^{'2} + B^3 \Delta C^2 \overline{\vartheta a}^{'3} + ..)$, welche Reihe bis zur kleinsten Altersergänzung fortgeht.

Aufserdem kann man noch, wenn die Altersergänzung von A gröfser ist als die der übrigen zwey Personen, den Ausdruck $\int \frac{\Delta A^{x-1} \int B^{x} \Delta C^{x-1}}{r^x \; A \; B \; C}$ in zwey Stücke theilen. Wenn nämlich γ die kleinste Altersergänzung ist, so hat man den Werth bis zu Ablauf der Zeit $\gamma = \int \frac{\Delta A^{\gamma-1} \int B^{\gamma} \Delta C^{\gamma-1}}{r^\gamma \; A \; B \; C}$, wo die Zahlung jedes Jahrs für sich berechnet werden mufs. Am Ende des Jahrs γ ist die Wahrscheinlichkeit, dafs B überlebt habe C, $= \frac{\int B^{\gamma} \Delta C^{\gamma}}{B \; C}$, der um γ Jahre aufgeschobene Sterbethaler für das Alter a aber $= \frac{A^{\gamma}}{A \; r^\gamma} \vartheta a + \gamma$, folglich wird der Werth dieses zweiten Theils $= \frac{\int B^{\gamma} \Delta C^{\gamma-1} A^{\gamma}}{B \; C \; A \; r^\gamma} \vartheta a + \gamma$, wo, wenn der erste Factor bekannt ist, die Berechnung für die ganze angegebene Zeit auf einmal geschehen kann.

Will man den Werth der Anwartschaft für diesen Fall vollständig haben, so ist für irgend ein ntes Jahr der gegenwärtige Werth =

$$\frac{\Delta A^{n-r}}{r^n A}\left[\int \frac{\overline{B^{n-2}\,\Delta C^{n-2}}}{B\;C} - \tfrac{1}{2}\int \frac{\overline{\Delta B^{n-2}\,\Delta C^{n-2}}}{B\;C}\right) + \frac{1}{r^n A B C}\int\left[\Delta A^{n-1}\int (B^{n-1} - x\,\Delta B^{n-1})\,\Delta C^{n-1}\,dx\right]dx$$

$$= \frac{\Delta A^{n-1}}{r^n A}\left(\int \frac{\overline{B^{n-2}\,\Delta C^{n-2}}}{B\;C} - \tfrac{1}{2}\int \frac{\overline{\Delta B^{n-2}\,\Delta C^{n-2}}}{B\;C} + \tfrac{1}{2}\frac{B^{n-1}\,\Delta C^{n-1}}{B\;C} - \tfrac{1}{6}\frac{\Delta B^{n-1}\,\Delta C^{n-1}}{B\;C}\right) =$$

$$\frac{\Delta A^{n-1}}{r^n A}\left(\int \frac{\overline{B^{n-1}\,\Delta C^{n-1}}}{B\;C} - \tfrac{1}{2}\int \frac{\overline{\Delta B^{n-1}\,\Delta C^{n-1}}}{B\;C} - \tfrac{1}{2}\frac{B^{n-1}\,\Delta C^{n-1}}{B\;C} + \tfrac{1}{3}\frac{\Delta B^{n-1}\,\Delta C^{n-1}}{BC}\right).$$

Die beiden ersten Theile in der Parenthese machen die vollständige Wahrscheinlichkeit aus, dafs am Ende des nten Jahrs B überlebt habe C (§. 227 b.), und wenn man diese ψ^n nennt, so wird der Werth für alle Jahre $= \int \frac{\psi^n\,\Delta A^{n-1}}{r^n A} - \tfrac{1}{2}\int \frac{\Delta A^{n-1} B^{n-1}\,\Delta C^{n-1}}{r^n\;A\;B\;C} + \tfrac{1}{3}\int \frac{\Delta A^{n-1}\,\Delta B^{n-1}\,\Delta C^{n-1}}{r^n\,A\,B\,C}$, wo man wohl den letzten Theil seiner Unbeträchtlichkeit wegen weglafsen kann. Der zweite Theil ist $= -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1 \dagger \lambda\,\overline{abc}}{r}\right.$

$$- \frac{A^{-1}\ B^{-1}}{A\ B} \lambda\,\overline{(a-1)\ (b-1)\ c} - \frac{C^{-1}B^{-1}}{CB} \lambda\,\overline{a(b-1)(c-1)} + \frac{B^{-1}}{B} \lambda\,\overline{a\ (b-1)\ c}].$$

§. 308.

Wenn ferner die Anwartschaft bezahlt werden soll bey dem Tode von A, unter der Bedingung, dafs *vorher B nach C verstorben sey*, so ist, auf ganze Jahre gerechnet, der gegenwärtige Werth der

$$\text{Anwartschaft} = \int \frac{\Delta A^{x-1} \int \Delta B^{x-1} (C - C^{x})}{r^{x}\ A\ B\ D},$$

wo x die Altersergänzung von A bezeichnet. Will man diesen Ausdruck in Theile zerlegen, so hat

$$\text{man } \frac{\int \Delta B^{x-1} (C - C^{x})}{B\ C} = \frac{\int \Delta B^{x-1}}{B} - \frac{\int \Delta B^{x-1}\ C^{x}}{B\ C} = \frac{B - B^{x}}{B} - \frac{\int \Delta B^{x-1}\ C^{x}}{A\ B} = 1 - \frac{B^{x}}{B} - \frac{\int \Delta B^{x-1}\ C^{x}}{A\ B},$$

$$\text{folglich } \int \frac{\Delta A^{x-1} \int \Delta B^{x-1} (C - C^{x})}{r^{x}\ A\ B\ C} = \int \frac{A^{x-1}}{r^{x}\ A} - \int \frac{A^{x}}{r^{x}\ A} - \int \frac{A^{x-1}\ B^{x}}{r^{x}\ A\ B} + \int \frac{A^{x}\ B^{x}}{r^{x}\ A\ B}$$

$$-\int \frac{\Delta A^{\overline{x-1}} \int \Delta B^{\overline{x-1}} C^{\overline{x}}}{r^x A B C} = \frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr}$$

$$- \frac{A^{\overline{-1}}}{A^{\overline{-}}} \lambda \overline{(a-1)\,b} + \lambda \overline{a\,b} -$$

$$\int \frac{\Delta A^{\overline{x-1}} \int \Delta B^{\overline{x-1}} C^{\overline{x}}}{r^x A B C}.$$ Der letzte Theil kömmt schon im nächstvorhergehenden §. vor, und ist danach $= \frac{1}{B C} (\Delta B C^{\overline{1}} \vartheta a + \Delta B^{\overline{1}} C^{\overline{2}} \overline{\vartheta a}^{\overline{2}} + \Delta B^{\overline{2}} C^{\overline{1}} \overline{\vartheta a}^{\overline{3}} + ..)$

Sonst kann man noch auf eine andre Art $\int \frac{\Delta A^{\overline{x-1}} \int \Delta B^{\overline{x-1}} (C - C^{\overline{x}})}{r^x A B C}$ in Theile zerlegen. Wenn nämlich γ die kleinste Altersergänzung ist und zu C gehört, so suche man zuerst $\int \frac{\Delta A^{\overline{\gamma-1}} \int \Delta C^{\overline{\gamma-1}} (B - B^{\overline{\gamma}})}{r^\gamma A B C}$, wo jedes Jahr besonders berechnet werden muſs. Am Ende des Jahrs γ ist die Wahrscheinlichkeit, daſs C gestorben sey nach B, $= \frac{\int \Delta C^{\overline{\gamma-1}} (B - B^{\overline{\gamma}})}{B C}$, und die aufgeschobene Erbschaft nach A ist $= \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A r^\gamma} \vartheta \overline{a+\gamma}$; also hat man den Werth der

Erbschaft für die Periode vom Ablauf der Zeit γ an bis zu Ende der Altersergänzung von A =

$$\frac{\int \Delta\, C^{\overline{\gamma-1}} \,(B - B^{\overline{\gamma}})}{B\ C} \cdot \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A_{\overline{r\gamma}}}\ \vartheta_{\overline{a+\gamma}}.$$

Setzt man übrigens den im §. 296 angegebenen Werth der bey dem Tode von A fälligen Anwartschaft, wenn er überhaupt in der Verbindung mit B und C zuletzt stirbt, = T, so hat man den Werth der bey dem Tode von A fälligen Erbschaft, *wenn zuvor B nach C verstorben seyn soll,* =

$$T - \int \frac{\Delta\, A^{\overline{\gamma-1}}}{{}_{r\gamma}A} \frac{\int \Delta\, C^{\overline{\gamma-1}}\,(B - B^{\overline{\gamma}})}{B\ C}$$

$$- \frac{\int \Delta\, C^{\overline{\gamma-1}}\,(B - B^{\overline{\gamma}})}{B\ C} \cdot \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A_{\overline{r\gamma}}}\ \vartheta_{\overline{a+\gamma}}.$$

Wollte man den vollständigen Werth für den Fall, dafs C nach B gestorben ist, haben, so ist die vollständige Zahl derer A, welche im nten Jahre sterben, nachdem zuerst B und dann C abgegangen

ist, $= \Delta A^{\overline{n-1}} \int \Delta\, C^{\overline{n-2}}\,(B - B^{\overline{n-1}}) -$

$\frac{1}{2} \Delta A^{\overline{n-1}} \int \Delta B^{\overline{n-2}}\ \Delta C^{\overline{n-2}} + \int [\Delta A^{\overline{n-1}}\ dx$

$\int \Delta\, C^{\overline{n-1}}\,(B - B^{\overline{n}} - 1 - x\ \Delta B^{\overline{n-1}})\ dx] =$

$\Delta A^{\overline{n-1}} \int \Delta C^{\overline{n-2}}\,(B - B^{\overline{n-1}}) - \frac{1}{2} \Delta A^{\overline{n-1}} \int \Delta B^{\overline{n-2}}\ \Delta C^{\overline{n-2}}$

$+ \frac{1}{2} \Delta A^{\overline{n-1}}\ \Delta C^{\overline{n-1}}\,(B - B^{\overline{n}}) - \frac{1}{3} \Delta A^{\overline{n-1}} \Delta B^{\overline{n-1}} \Delta C^{\overline{n-1}}$

$$= \Delta A^{n-1} \int \Delta C^{n-1} (B - B^{n}) - \tfrac{1}{2} \Delta A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} \Delta C^{n-1}$$
$$- \tfrac{1}{2} \Delta A^{n-1} \Delta C^{n-1} (B - B^{n}) + \tfrac{1}{6} \Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1} \Delta C^{n-1}.$$

Folglich hat man, wenn χ^{n} hier die im §. 229 b. bestimmte vollständige Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des nten Jahrs C gestorben sey nach B, bezeichnet, den vollständigen Werth der Anwartschaft

$$= \int \frac{\chi^{n} \Delta A^{n-1}}{r^{n} A} - \tfrac{1}{2} \int \frac{\Delta A^{n-1} \Delta C^{n-1} (B - B^{n})}{r^{n} A B C}$$
$$+ \tfrac{1}{6} \int \frac{\Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1} \Delta C^{n-1}}{r^{n} A B C},$$ wo man

wohl füglich den letzten Theil bey seiner Unbeträchtlichkeit weglafsen kann.

Druckt also T den vollständigen Werth der Anwartschaft bey dem Tode von A aus, wenn er überhaupt zuletzt stirbt, so ist der Werth der Anwartschaft für den Fall, dafs B nach C gestorben,

$$= T - \int \frac{\chi^{n} \Delta A^{n-1}}{r^{n} A} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\Delta A^{n-1} \Delta C^{n-1} (B - B^{n})}{r^{n} A B C}$$
$$- \tfrac{1}{6} \int \frac{\Delta A^{n-1} \Delta B^{n-1} \Delta C^{n-1}}{r^{n} A B C}.$$

Bey der Berechnung kann man eben so verfahren, wie vorher im §. 229 angegeben worden, indem man die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des nten Jahrs C nach B gestorben ist, oder χ^{n}, mit $\frac{\Delta A^{n-1}}{r^{n}}$ multiplicirt.

Anm. Andre Schriftsteller haben die Aufgaben der beiden vorhergehenden §. §. auf eine ähnliche Weise aufgelöset, wie vorher [§. 276 Anm.] in Ansehung der Leibrenten für das zwiefache Ueberleben bemerkt ist. *Tetens* hat nur den Fall, dafs die Anwartschaft bey dem Tode von A bezahlt werden soll, wenn zuerst C und dann B gestorben [a. a. O. S. 421 u. 550], aber nicht den Fall, dafs die Anwartschaft bey dem Tode von A fällig ist, wenn zuvor B überlebt hat C [wo B auch bey dem Tode von A noch leben kann]. Bey der Auflösung jenes Problems gebraucht jedoch Tetens als Hülfsmittel die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des nten Jahrs C überlebt habe B oder B überlebt habe C, und setzt die erstere

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{C^{\overline{n}}}{C} - \frac{B^{\overline{n}}}{B} - \frac{B^{\overline{n}}\,C^{\overline{n}}}{B\,C}\right)$$

und letztere $= \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{B^{\overline{n}}}{B} - \frac{C^{\overline{n}}}{C} - \frac{B^{\overline{n}}\,C^{\overline{n}}}{B\,C}\right)$, welche Ausdrücke er aus einer Formel nach der Hypothese herleitet. Jener Ausdruck ist indefsen

$$= \frac{B - B^{\overline{n}}}{B} - \frac{(B - B^{\overline{n}})\,(C - C^{\overline{n}})}{2\,B\,C},$$

dieser $= \frac{C - C^{\overline{n}}}{C} - \frac{(B - B^{\overline{n}})\,(C - C^{\overline{n}})}{2\,B\,C}$,

d. h. diese Ausdrücke enthalten die Wahrscheinlichkeit, dafs im nten Jahre entweder B oder C gestorben sey, weniger der Hälfte der Wahrscheinlichkeit, dafs B und C beide gestorben. Freilich wird die Rechnung hiernach einfacher, aber diese Näherungswerthe weichen oft von den wahren Werthen sehr ab.

Brune setzt Seite 196 in seiner Berechnung der Lebensrenten etc., wenn die Anwartschaft, fällig bey dem Tode von

A auf den Fall dafs er überhaupt zuletzt stirbt, mit T, auch die Altersergänzung der jüngern Person mit β, der ältern aber mtt γ bezeichnet wird, den Werth der Anwartschaft, die bey dem Tode von A bezahlt werden soll, wenn vorher zuerst die ältere und dann die jüngere gestorben, $= (1 - \frac{\gamma}{2\beta})$ T, und auf den Fall, dafs zuerst die jüngere und dann die ältere gestorben, $= \frac{\gamma}{2\beta}$ T. Es gilt in Ansehung dieser Ausdrücke dafselbe, was ich vorher bey §. 276 in Beziehung auf die Rentenwerthe für das zwiefache Ueberleben bemerkt habe.

Morgan, der diese Anwartschaften sehr umständlich abhandelt, nimmt an, dafs, wenn A zuerst, dann B und zuletzt C sterben soll, bey defsen Tode die Anwartschaft fällig wird, in jedem Jahre die Anwartschaft zu zahlen sey 1) für $\frac{1}{6}$ derer Vereine, wovon A, B und C in demselben Jahre sterben, 2) für $\frac{1}{2}$ derer Vereine, wovon B und C in dem nämlichen Jahre sterben, A aber vorher abgegangen ist, 3) für $\frac{1}{2}$ derer Vereine, wovon C in demselben Jahre stirbt, B und A aber vorher abgegangen sind. Hiernach erhält er den Werth dieser Anwartschaft

$$= \frac{1}{6r} - \frac{\lambda c}{2pr} - \frac{\lambda (a\,c)}{2\,r} + \frac{\lambda (bc)}{2} -$$

$$\frac{\lambda (abc)}{6\,p\,r} + \frac{A^{-1}}{2\,A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,c} -$$

$$\frac{C^{-1}}{2C}\,\lambda\,\overline{b\,(c-1)} - \frac{A^{-1}\,B^{-1}}{6\,A\,B}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,(b-1)\,c} +$$

$$\frac{A^{-1}\quad C^{-1}}{3\,A\,C}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b\,(c-1)} -$$

$$\frac{B^{-1}\quad C^{-1}}{6\,B\,C}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)\,(c-1)} -$$

$$\frac{A^{-1}}{3A}\,\lambda\,(a-1)\,b\,c + \frac{B^{-1}}{6B}\,\lambda\,a\,(b-1)\,c + \frac{C^{-1}}{6C}\,\lambda\,ab\,(b-1).$$

Die Formel kann indefsen unverändert nur bis zur kleinsten Altersergänzung gelten, also nur wenn C die älteste Person ist. Wenn die kleinste Altersergänzung $=$ x und B die älteste Person ist, so ist zu dem nach dieser Formel bis zum xten Jahre berechnetenWerthe hinzuzulegen der Werth des aufgeschobenen Sterbethalers für die dann noch lebenden C, deren B nach A verstorben sind, oder $\varphi^{x} \frac{C^{x}}{C} \cdot \vartheta \frac{c+x}{rx}$, wo φ^{x} die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dafs bis zu Ende des xten Jahrs B gestorben sey nach A. Ist A die älteste Person und die kleinste Altersergänzung $=$ z, so ist 1) auf die nämliche Weise hinzuzulegen $\varphi^{z} \frac{C^{z}}{C\,rz}\ \vartheta\,c+z$, 2) aufserdem noch der Werth des Sterbethalers für die dann noch in Verbindung mit B lebenden C, welche nach B sterben, oder

$$\frac{B^{z}\ C^{z}}{BC\ rz}\ [\vartheta\,c+z - \tfrac{1}{2}\,\vartheta\,(b+z)\,(c+z) + \tfrac{1}{2}\frac{B^{z-1}}{Bz}\,\lambda\,(b+z-1)\,(c+z) - \tfrac{1}{2}\frac{C^{z-1}}{Cz}\,\lambda\,(b+z)\,(c+z-1)]$$

(§. 190). In dieser Formel ist Alles richtig bis auf die Annahme, dafs die Anzahl derer B, welche nach A sterben, bis zum Ende eines bestimmten Jahrs gleich sey der Hälfte aller ausgestorbenen Paare von AB (S. §. 229. b. Anm. 2). Morgan versichert, dafs seine Formel ziemlich mit den wahren Werthen

zusammenstimme, und er führt S. 213 seines Werks mehrere Beispiele davon an. Es ist indefsen immer bedenklich, eine Formel anzuwenden, von der man nicht weifs, wie viel man dabey fehlt.

Wenn A 40, B 50 und C 70 Jahr ist und die bey dem Tode von A fälligen Anwartschaften nach Süfsmilchs Sterbensordnung und dem Zinsfufse zu 4 Procent *bis zu der Altersergänzung* γ berechnet werden, so erhält man, aus den vorher Seite 271 angegebenen Werthen, für die gedachte Zeit den vollständigen Werth der bey dem Tode von A fälligen Anwartschaft 1) wenn zuvor C und dann B gestorben, $=$ 0,0646, 2) wenn zuerst B und dann C gestorben, $=$ 0,0391. Beide Theile zusammengenommen geben also die Anwartschaft auf den Fall, dafs A überhaupt während dieser Zeit zuletzt stirbt, $=$ 0,1037. Nach Brunes Methode würde der Werth für den ersten der gedachten Fälle

$= (1 - \frac{13}{46})$. 0,1037 $=$ 0,0744, für den letzten Fall aber

$= \frac{13}{46}$ 0,1037 $=$ 0,0293 seyn.

Will man für die folgende Zeit weiter fort rechnen, so ist, ebenfalls nach Süfsmilch und zu 4 Procent Zinsen,

$$\frac{A^{\overline{\gamma}}}{A_{\overline{r\gamma}}} \vartheta\, \overline{a \dagger \gamma} = \frac{152}{374}\, 0{,}36068.0{,}6993 = 0{,}1025;$$

$$\frac{\int \Delta C^{\overline{\gamma-1}} (B - B^{\overline{\gamma}}) - \frac{1}{2} \int \Delta C^{\overline{\gamma-1}} \Delta B^{\overline{\gamma-1}}}{BC}$$

$$= \frac{8874 \cdot 513}{300.112} = 0{,}2488;$$ also hat man

$$\chi^{\overline{\gamma}} \frac{A^{\overline{\gamma}}}{A_{\overline{r\gamma}}} \vartheta\, \overline{a \dagger \gamma} = 0{,}2488.0{,}1025 = 0{,}0255.$$

Danach wird die gesammte Anwartschaft bey dem Tode von A, wenn zuerst B und dann C gestorben, $=$ 0,0591 † 0,0255 $=$ 0,0646. Weiter hat man

$$\frac{\int \Delta B^{\gamma-1} (C - C^{\gamma}) - \frac{1}{2} \int \Delta B^{\gamma-1} \Delta C^{\gamma-1}}{B C} = \frac{18808-513}{300.112} = 0{,}5445, \text{ und folglich}$$

$$\varphi^{\gamma} \cdot \frac{A^{\gamma}}{A_{r\gamma}} \vartheta \overline{a \dagger \gamma} = 0{,}5445.0{,}1025 = 0{,}0558.$$

Noch ist $\frac{A^{\gamma} B^{\gamma}}{A B_{r\gamma}} [\vartheta \overline{a\dagger\gamma} - \frac{1}{2} \vartheta \overline{(a\dagger\gamma)(b\dagger\gamma)} -$

$$\frac{1}{2} \frac{A^{\gamma-1}}{A^{\gamma}} \lambda \overline{(a \dagger \gamma - 1)(b \dagger \gamma)} + \frac{B^{\gamma-1}}{2 B^{\gamma}} \lambda \overline{(a \dagger \gamma)(b \dagger \gamma - 1)}] = 0{,}01175.$$

Hiernach erhält man folglich die gesammte Anwartschaft bey dem Tode von A, wenn zuerst C und dann B stirbt, $=$ 0,0646 † 0,0558 † 0,01175 $=$ 0,1522.

Die Anwartschaft, zahlbar bey dem Tode von A, wenn derselbe überhaupt zuletzt stirbt, ist also $=$ 0,0646 † 0,1322 $=$ 0,1968. Nach Brunes Annahme würde folglich der ganze Werth dieser Anwartschaft, nachdem B zuletzt gestorben, $=$ 0,1412, und, wenn C zuletzt gestorben, $=$ 0,0556, welche Werthe von den vorhin angegebenen Gröfsen beträchtlich verschieden sind.

Verbeſserungen.

S. 115, Z. 1 v. o. anstatt $\triangle B^{\frac{-r}{\quad}}$ lies $\triangle B^{\frac{n-r}{\quad}}$.

S. 155, Z. 12 v. o. vor m † r setze: im letzten Gliede.

S. 184, Z. 4 v. u. anstatt $\frac{A^2 B^2 \,..\, K^2}{A\ B\ \,..\ \ K\ r^2}$

lies $\frac{A^2 B^2 \,..\, K^2}{r^2}$.

2711 4

MAR 16 197

HG
8781
M4
T.2

Meyer, Johann Heinrich
Allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY